This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

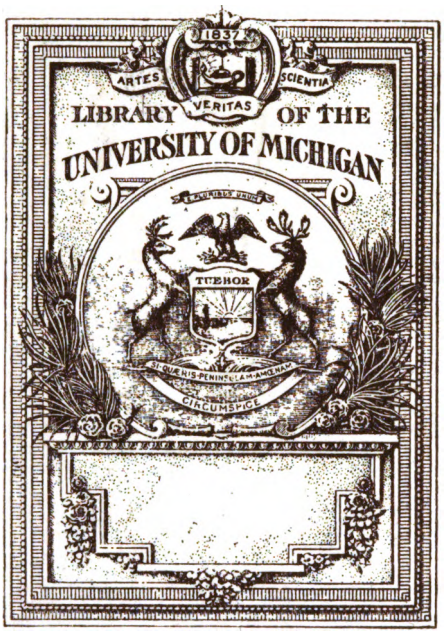
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 507230



Digitized by Google

Mathematics
QA
.M56

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME X. — ANNÉE 1900.

(TOME XX DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
23, RUE DU CALVAIRE, 23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1900

Digitized by Google

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

CGQ., Correspondance physique et mathématique, fondée en 1825 par GARNIER et QUETELET, continuée par QUETELET.

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué d'abord par G. DE LONGCHAMPS, ensuite par G. MARIAUD.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

Digitized by Google

MATHESIS

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. ERNEST CESÀRO.

1. Dans mainte question de Géométrie intrinsèque, on est conduit à exprimer qu'une droite d, dont on connaît la position par rapport au trièdre fondamental d'une courbe (M), occupe certaines positions remarquables (tangente, binormale, normale principale, axe central, etc.) dans le trièdre de quelque autre courbe inconnue (M_1). La droite étant définie, par rapport au trièdre de (M), par ses cosinus directeurs α, β, γ, et par ses autres coordonnées, ξ, η, ζ (liées aux cosinus par la relation $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$), il faut savoir (*), avant tout, que les variations absolues de ces coordonnées, dans l'espace, divisées par l'arc élémentaire $MM' = ds$ de la courbe fondamentale, ont les expressions que voici:

$$\left\{\begin{aligned} &\dot\alpha = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho}, \quad \dot\beta = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\gamma}{r}, \quad \dot\gamma = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r}, \\ &\dot\xi = \frac{d\xi}{ds} - \frac{\zeta}{\rho}, \quad \dot\eta = \frac{d\eta}{ds} - \frac{\zeta}{r} - \gamma, \quad \dot\zeta = \frac{d\zeta}{ds} + \frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r} + \beta. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Dans ces formules s, ρ, r représentent l'arc et les rayons de courbure de (M). Il convient de leur adjoindre les formules, qui font connaître les variations des coordonnées d'un *point* quelconque :

$$\dot x = \frac{dx}{ds} - \frac{z}{\rho} + 1, \quad \dot y = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}, \quad \dot z = \frac{dz}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}. \tag{2}$$

2. Il est aisé de démontrer que la distance entre les droites d et d', qui correspondent aux points M et M', infiniment voisins sur la courbe fondamentale, est

$$\pm \frac{\dot\alpha\xi + \dot\beta\eta + \dot\gamma\zeta}{\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}}\, ds.$$

Afin que la droite reste TANGENTE à une courbe, il faut donc, et il suffit, que l'on ait

$$\dot\alpha\xi + \dot\beta\eta + \dot\gamma\zeta = 0. \tag{3}$$

(*) *Geometria intrinseca*, p. 125.

370479

Digitized by Google

Par exemple, si la droite est invariablement liée au trièdre de (M), on trouve, en substituant les valeurs (1) dans l'égalité (3),

$$\frac{\beta\eta}{\rho^2} - \frac{\alpha\eta + \beta\xi}{\rho r} + \frac{\alpha\xi}{r^2} = \frac{\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{r}. \tag{4}$$

Nous avons discuté, ailleurs(*), cette relation. Nous nous bornons, ici, à signaler le cas (exceptionnel) des courbes caractérisées par l'équation intrinsèque

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{\rho r} = \frac{1}{r}. \tag{5}$$

Pour que la relation (4) soit vérifiée par des valeurs *constantes* de $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha\beta = 0, \ \alpha\xi = 0, \ \frac{\beta\eta}{a} = -\frac{\alpha\eta + \beta\xi}{b} = \beta^2 + \gamma^2. \tag{6}$$

Sans tenir compte des parallèles à la tangente ($\alpha = 1$), situées dans le plan rectifiant ($\xi = \eta = 0$), on voit qu'on doit avoir

$$\alpha = 0, \quad \beta\eta = a, \quad -\beta\xi = b, \tag{7}$$

et qu'il n'y a pas d'autre moyen de satisfaire aux conditions (6) tant que $a \lessgtr 0$. Les équations (7) définissent une infinité de parallèles au plan normal, s'appuyant sur la droite qui joint M au point (a, b) du plan rectifiant, et constituant ainsi un conoïde du troisième degré. Les projections de ces droites sur le plan normal enveloppent une parabole, dont le foyer est M, et dont le sommet se trouve sur la normale principale, à la distance b de M. En particulier, pour $b = 0$, on voit que *les courbes, dont la torsion est proportionnelle au carré de la flexion, sont caractérisées par l'existence d'un conoïde droit (du troisième degré), invariablement lié à leur trièdre fondamental, et dont chaque génératrice engendre une surface développable.* Lorsqu'on fait tendre a vers zéro, l'équation (5) tend à représenter un *cercle gauche*, et le conoïde (7) s'aplatit indéfiniment sur le plan normal : il s'y réduit au système des tangentes à une parabole; mais en même temps, pour $a = 0$, une seconde parabole apparait dans le plan osculateur, parcequ'on peut alors satisfaire aux conditions (6) en prenant, au lieu de (7),

$$\beta = 0, \quad \xi = 0, \quad -\alpha\eta = b\gamma^2.$$

(*) *Geometria intrinseca*, p. 149.

Digitized by Google

8. Demandons-nous, maintenant, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que d soit la BINORMALE de quelque courbe (M_1). Soient p et q les distances de M au plan rectifiant et au plan osculateur de (M_1), au point M_1 qui correspond à M sur la courbe inconnue. *Lorsqu'on fixe le trièdre de* (M_1), la variation absolue de q dans l'espace, évidemment mesurée par la projection αds de MM' sur d, est égale à $dq - pd\sigma$, où $d\sigma$ est l'angle de torsion de (M_1), qu'on peut calculer par la formule

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}. \tag{8}$$

Cela résulte de la seconde formule (2), appliquée au point M ($x, y = q, z = p$) dans le trièdre de (M_1). On a donc

$$\alpha + p\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dq}{ds}. \tag{9}$$

Telle est la condition cherchée, dans laquelle il nous reste à exprimer p et q en fonction des coordonnées de d, et de leurs variations. Soient x, y, z les coordonnées du point inconnu M_1, par rapport au trièdre de (M). La tangente à (M_1), dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, doit être perpendiculaire à d et à d', de sorte que

$$\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z} = 0, \quad \dot{\alpha}x + \dot{\beta}\dot{y} + \dot{\gamma}\dot{z} = 0. \tag{10}$$

Or, on a

$$\beta\zeta - \gamma\eta = \beta(\beta x - \alpha y) + \gamma(\gamma x - \alpha z) = x + \alpha q \text{ ; etc.}$$

Donc

$$x = \beta\zeta - \gamma\eta - \alpha q, \quad y = \gamma\xi - \alpha\zeta - \beta q, \quad z = \alpha\eta - \beta\xi - \gamma q; \tag{11}$$

puis

$$\begin{cases} \dot{x} = (\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta}) + (\dot{\beta}\zeta - \dot{\gamma}\eta) - \alpha\dot{q} - \dot{\alpha}q, \\ \dot{y} = (\gamma\dot{\xi} - \alpha\dot{\zeta}) + (\dot{\gamma}\xi - \dot{\alpha}\zeta) - \beta\dot{q} - \dot{\beta}q, \\ \dot{z} = (\alpha\dot{\eta} - \beta\dot{\xi}) + (\dot{\alpha}\eta - \dot{\beta}\xi) - \gamma\dot{q} - \dot{\gamma}q. \end{cases} \tag{12}$$

Dans ces formules, $\dot{q}ds$ représente la variation absolue de q, dans l'espace, *lorsqu'on fixe le trièdre de* (M). Cette variation est d'ailleurs égale à $pd\sigma$ en vertu de la seconde formule (2), appliquée au point M

Digitized by Google

(considéré comme fixe) dans le trièdre de (M_1). Cela posé, il suffit de remplacer $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ par leurs valeurs (12) dans les égalités (10) pour obtenir

$$p\frac{d\sigma}{ds} = \begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \xi \\ \beta & \dot{\beta} & \eta \\ \gamma & \dot{\gamma} & \zeta \end{vmatrix}, \quad -q\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \dot{\xi} \\ \beta & \dot{\beta} & \dot{\eta} \\ \gamma & \dot{\gamma} & \dot{\zeta} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

4. Les coordonnées (11) appartiennent, pour q arbitraire, à un point quelconque de d, et les formules (12) font connaître la direction de la tangente au lieu décrit par ce point; mais $\dot{q}ds$ n'y représente plus $pd\sigma$; car c'est précisément l'égalité entre ces deux quantités, qui caractérise d comme binormale. Il est d'ailleurs facile de se convaincre que cette égalité ne diffère pas de la condition (9). En effet, si l'on applique les formules (2) aux coordonnées (11), en tenant compte des formules (1) et (12), on trouve

$$\dot{q} = \frac{dq}{ds} - \alpha.$$

Cette relation, presque évidente, subsiste toujours; mais elle ne se réduit à la condition (9) que pour $\dot{q}ds = pd\sigma$.

5. Proposons-nous, maintenant, de déterminer les coordonnées de la droite d_1, commune perpendiculaire à d et d'. Les cosinus directeurs doivent satisfaire aux conditions

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, \quad \dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1 = 0,$$

et, par suite, leurs valeurs sont

$$\alpha_1 = (\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\frac{ds}{d\sigma}, \quad \beta_1 = (\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})\frac{ds}{d\sigma}, \quad \gamma_1 = (\alpha\dot{\beta} - \beta\dot{\alpha})\frac{ds}{d\sigma}. \tag{15}$$

Pour calculer les autres coordonnées, écrivons les conditions de rencontre de d_1 avec d et d' :

$$\Sigma\alpha\xi_1 = -\Sigma\alpha_1\xi = -\frac{ds}{d\sigma}\Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\xi = -p,$$

$$\Sigma\dot{\alpha}\xi_1 = -\Sigma\alpha_1\dot{\xi} = -\frac{ds}{d\sigma}\Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\dot{\xi} = q\frac{d\sigma}{ds}.$$

Digitized by Google

Nous avons, maintenant, le système

$$\begin{cases} \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 = -p, \\ \dot{\alpha}\xi_1 + \dot{\beta}\eta_1 + \dot{\gamma}\zeta_1 = q\dfrac{d\sigma}{ds}, \\ \alpha_1\xi_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\zeta_1 = 0, \end{cases}$$

qui nous donne

$$\xi_1 = -\alpha p + \dot{\alpha}q\frac{ds}{d\sigma},\quad \eta_1 = -\beta p + \dot{\beta}q\frac{ds}{d\sigma},\quad \zeta_1 = -\gamma p + \dot{\gamma}q\frac{ds}{d\sigma}. \qquad (16)$$

Dans ces formules, p et q sont *définis* par les égalités (13). Nous devons toutefois remarquer que p représente toujours la distance de M au plan dd_1, parceque les cosinus directeurs de la perpendiculaire à ce plan sont proportionnels à $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, et l'on a bien, indépendamment de q,

$$p\frac{d\sigma}{ds} = -\Sigma\dot{\alpha}x = -\Sigma\dot{\alpha}(\beta\zeta - \gamma\eta) = \begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \xi \\ \beta & \dot{\beta} & \eta \\ \gamma & \dot{\gamma} & \zeta \end{vmatrix}.$$

De même la valeur de q est précisément celle qu'on doit substituer dans les égalités (11) pour obtenir les coordonnées du *point central* de d, parceque la seconde relation (10) ne cesse pas (comme la première) d'être vérifiée, et, par suite, la substitution des valeurs (12) dans cette relation conduit toujours à la valeur (13) de q. Il n'en est pas ainsi de p; car on trouve, par le même procédé, en tenant compte de la relation (14),

$$\dot{\alpha}\dot{x} + \dot{\beta}\dot{y} + \dot{\gamma}\dot{z} = \alpha + p\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dq}{ds}, \qquad (17)$$

ce qui réduit l'une à l'autre la condition (9) et la première relation (10).

6. Les formules du paragraphe précédent nous mettent à même de voir quel est le lien qui existe entre les deux questions que nous avons traitées dans les §§ 2, 3, et comment il est possible de ramener la seconde à la première. Pour que d soit la *binormale* d'une courbe, il faut et il suffit que d_1 soit *tangente* à une autre courbe. Or, on déduit des formules (15) et (16), par un calcul facile,

$$\dot{\alpha}_1\dot{\xi}_1 + \dot{\beta}_1\dot{\eta}_1 + \dot{\gamma}_1\dot{\zeta}_1 = \left(\alpha + p\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dq}{ds}\right)\frac{ds^2}{d\sigma^2}\Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\ddot{\alpha}.$$

Digitized by Google

La condition (3), appliquée à la droite d_1, nous reconduit donc à la condition (9); car on ne peut avoir identiquement

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \ddot{\alpha} \\ \beta & \dot{\beta} & \ddot{\beta} \\ \gamma & \dot{\gamma} & \ddot{\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

sans que la droite d reste parallèle à un plan, ce qui est impossible pour la binormale d'une courbe gauche.

7. On peut faire une application simple de la formule (9) dans le cas où la droite d est invariablement liée au trièdre de (M). Les coordonnées $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ sont alors constantes, et la substitution des valeurs (1) dans les formules (8) et (13) donne

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} - \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{\alpha}{r}\right)^2, \quad p\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho},$$
$$-q\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{\gamma}{\rho} + \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{\gamma\xi - \alpha\zeta}{\rho} - \frac{\beta\zeta - \gamma\eta}{r}\right);$$

puis l'égalité (9) devient une relation, à coefficients constants, entre les courbures et leurs dérivées. Si l'on veut que cette relation ait lieu entre les courbures, indépendamment de l'arc, on doit prendre

$$\alpha + \frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho} = 0, \quad q = \textit{constante}.$$

Donc, si (M) n'est pas une courbe de Bertrand, il faut que α, ξ, η soient nuls, et, par suite, qu'il en soit de même de $\gamma\zeta$. L'hypothèse $\gamma = 0$ nous donne les parallèles à la binormale, situées dans le plan rectifiant. En laissant de côté ces droites, il nous reste à supposer $\zeta = 0$. Dans cette hypothèse, d est une des normales de (M); mais cette courbe n'est pas quelconque, puisque la condition $q = \textit{constante}$ exige qu'il y ait entre les courbures une relation telle que celle-ci :

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{\rho}.$$

La droite qui joint M au point $(\sqrt{a(b-a)}, a)$ du plan normal est la binormale de la courbe décrite par ce point. En particulier, pour $a = b$, la droite en question n'est autre que la normale principale de (M), d'où il suit que *les courbes caractérisées par l'équation* $\rho r^2 = a(\rho^2 + r^2)$ *ont*

Digitized by Google

pour normales principales les binormales d'une autre courbe. Ce résultat est d'ailleurs évident. En effet, la dernière équation exprime que l'axe central se trouve à une distance *constante* de la droite rectifiante, et par suite, qu'il engendre une surface parallèle à la surface rectifiante. Donc la normale principale (commune perpendiculaire à deux axes infiniment voisins) ne cesse pas d'être la binormale de la courbe enveloppée par l'axe central. (*A continuer*).

SUR TROIS HYPERBOLES ASSOCIÉES A UN TRIANGLE;

par M. A. Droz-Farny.

M. J. Neuberg a publié dans l'*Educational Times*, sous le numéro 13955 le joli théorème suivant, qui constitue un intéressant exercice de géométrie projective :

On construit sur les côtés d'un triangle ABC, *trois triangles isoscèles variables* A'BC, B'CA, C'AB. *Les droites* BA', BC' *coupent* AC *en* B_1, B_2; *les droites* CB', CA' *coupent* BA *en* C_1, C_2; *enfin les droites* AC', AB' *coupent* CB *en* A_1, A_2. *Cela posé, les droites* B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 *enveloppent trois hyperboles qui touchent deux des côtés du triangle* ABC *et ont pour asymptote le troisième côté; ces courbes ont pour tangente commune, la droite de Lemoine du triangle* ABC.

Voici la solution que j'ai publiée dans le numéro de janvier 1899. Soit A_0 le milieu de BC; le lieu géométrique du sommet A' est la médiatrice correspondant au côté BC; elle rencontre AC et AB respectivement en β et γ.

Les rayons BA' et CA' décrivent deux faisceaux perspectifs, donc les ponctuelles B_1 et C_2 sont homographiques; la droite B_1C_2 enveloppe une conique tangente aux côtés AC et AB.

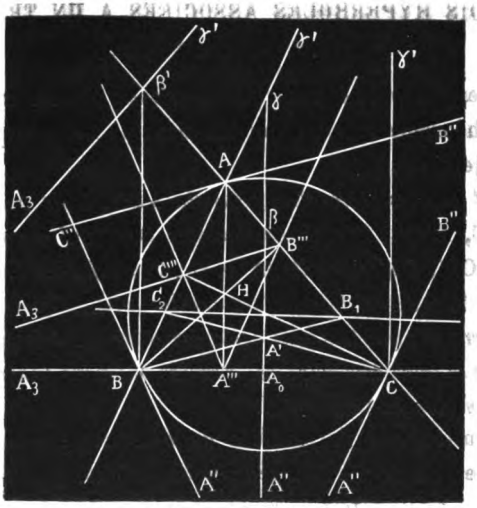
En faisant coïncider A' avec β ou γ, on constate qu'au point β de la série B_1, ou qu'à γ de la série C_2 correspond chaque fois dans l'autre série le point A. La conique touche donc les côtés AC et AB aux points où ils sont rencontrés par la médiatrice du troisième côté; $\beta\gamma$ est donc la polaire de A.

Si A' coïncide avec A_0, B_1, tombe en C et C_2 en B; la conique est tangente aux trois côtés du triangle, et, d'après un théorème connu, le conjugué harmonique de A_0, intersection de BC avec la polaire de A, par rapport à B et C, c'est-à-dire ici le point à l'infini de BC, sera le

Digitized by Google

point de contact sur cette droite. La conique est une hyperbole dont BC est une des asymptotes.

On pourrait encore démontrer ce dernier fait en s'appuyant sur le théorème suivant, conséquence du théorème de Brianchon : Dans toute conique inscrite dans un triangle, les trois droites qui joignent un sommet au point de contact sur le côté opposé se coupent en un même point. Or ici, Bβ et Cγ se croisent en P, et comme le triangle γBC est isoscèle, AP est parallèle à BC et rencontre par conséquent cette droite en son point à l'infini.



Le segment compris entre les asymptotes, d'une tangente quelconque à une hyperbole, étant divisé en parties égales par son point de contact, il est facile de voir, que la seconde asymptote de notre courbe correspond au point à l'infini de la médiatrice.

Soit A_5 le point d'intersection des deux asymptotes, ou le centre de l'hyperbole; comme BB_1 et CC_2 sont alors remplacées par les droites $B\beta'$, $C\gamma'$ perpendiculaires à BC et que $B\beta' = a \operatorname{tang} C$ et $C\gamma' = a \operatorname{tang} B$, on a

$$\frac{A_5B}{A_5C} = \frac{\operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} B}.$$

(*) Dans le trapèze $B\beta'\gamma'C$, la diagonale AA_5 est divisée harmoniquement par $B\beta'$, $C\gamma'$, donc le côté BC est divisé harmoniquement par A_5 et la hauteur AA''' (de ABC issue de A). On en conclut que les centres des trois hyperboles sont les points de rencontre des côtés homologues du triangle ABC et du triangle orthique $A'''B'''C'''$ (J. N.)

Digitized by Google

En faisant coïncider A′ avec le pôle A″ de BC par rapport au cercle circonscrit ABC, la tangente B_1C_2 devient évidemment la droite de Lemoine du triangle.

Les trois hyperboles correspondant aux trois médiatrices du triangle, sont donc inscrites dans un quadrilatère ayant pour côtés les trois côtés du triangle ABC et la droite de Lemoine de ce triangle. En vertu du théorème de Newton, leurs trois centres sont donc en ligne droite, la ligne de jonction des milieux des trois diagonales du quadrilatère. Par conséquent, si les tangentes au cercle ABC, menées aux sommets A, B, C rencontrent BC, CA, AB en A_4, B_4, C_4, les points A_5, B_5, C_5 et les milieux des droites AA_4, BB_4. CC_4 sont sur une même droite.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×1. *Sur une réussite.* Dans n urnes numérotées de 1 à n, sont placées au hasard n boules numérotées de 1 à n. De l'urne 1, on tire la boule qui s'y trouve et qui porte par exemple le numéro a; on la substitue à la boule occupant l'urne correspondante a; cette boule portait par exemple le numéro b; on recommence avec la boule b comme avec la boule a, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on rencontre la boule 1 que l'on place dans l'urne 1. Cette opération terminée, le jeu est dit *réussi* si toutes les boules sont alors dans les urnes correspondantes.

Cherchons la probabilité de la réussite.

Etablissons d'abord qu'il y a des chances égales d'amener la boule 1 au premier, au second tirage, ou à un tirage quelconque. 1°) Il y a une probabilité $\frac{1}{n}$ d'amener la boule au premier tirage. 2°) L'amener au second tirage est un événement qui peut arriver de $n-1$ manières également possibles, car, au premier coup, on a des chances égales d'amener un des numéros 2, 3,.... n et, de chacune de ces manières, la probabilité d'amener 1 au second coup est $\frac{1}{n-1}$; on a donc, pour l'arrivée de la boule 1 au deuxième tirage, la probabilité

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

3°) on démontre sans peine, de proche en proche, le lemme énoncé, lequel

Digitized by Google

est d'ailleurs pour ainsi dire intuitif. Il est possible d'en donner d'autres démonstrations.

A présent, si l'on amène la boule 1 au $n^{ième}$ tirage, on a passé par toutes les urnes et, dans ce cas, la réussite est certaine.

Il en est de même si le numéro 1 arrive au $(n-1)^{ème}$ coup, car une seule urne n'aura pas été visitée, et celle-là contient à coup sûr la boule correspondante.

Si 1 est amené au $(n-k)^{ème}$ coup, k urnes n'auront pas été visitées et, pour que ces urnes contiennent leurs numéros correspondants, il n'y a qu'une chance favorable sur un nombre de cas égal au nombre de permutations simples de k objets.

La probabilité totale de notre réussite est donc

$$\frac{1}{n}\left[1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\right].$$

La parenthèse contient les n premiers termes du développement de e. On vérifie immédiatement que la réussite est *probable* pour $n < 6$.

En pratique, on réalise les conditions de l'énoncé en alignant sur la table des cartes ou des dominos, retournés de façon à être cachés; on leur assigne mentalement un ordre dans lequel ces objets doivent se ranger, ce qui remplace le numérotage des urnes. On peut employer un jeu complet de dominos ou de cartes ou une partie déterminée (les 8 cœurs par exemple).

Le lecteur peut s'exercer à traiter la question plus complexe que voici : on tire les boules des urnes 1 et 2; on opère avec la première comme il est dit plus haut et, l'opération étant terminée, on recommence avec la boule tirée de l'urne 2. La probabilité de la réussite est alors augmentée. (M. Stuyvaert).

×**2.** ***Substitutions monocycliques.*** Voici une autre solution du problème traité dans la note précédente. Convenons de désigner par le symbole

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 & \cdots & a_n \\ 1\,2 & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

un *état* quelconque des urnes : les nombres de la seconde ligne sont les numéros des urnes; les nombres supérieurs, ceux des boules déposées respectivement dans ces urnes, de sorte que l'urne i contient la boule a_i. Remarquons immédiatement que le nombre des états possibles des urnes

Digitized by Google

est celui des permutations des nombres 1, 2, ... n et que les colonnes du symbole (1) peuvent être interverties arbitrairement.

Cela posé, au lieu de déplacer les boules comme l'indique l'énoncé, il revient au même de disposer les urnes dans l'ordre suivant. L'urne 1 continue à occuper le premier rang à gauche ; si elle contient la boule b_1 (pour plus de facilité, nous écrivons b_1 au lieu de a_1), l'urne b_1 sera placée au deuxième rang, si elle contient le boule b_2, l'urne b_2 sera placée au troisième rang, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une urne b_p qui contient la boule 1. On aura une *réussite* si les urnes suivantes renferment chacune la boule ayant le numéro de l'urne ; nous convenons de placer ces urnes dans un ordre quelconque à la suite de l'urne b_p.

Une réussite est donc figurée par le symbole

$$\begin{pmatrix} b_1 b_2 \cdots b_p & 1 & b_{p+1} \cdots b_{n-1} \\ 1 & b_1 \cdots b_{p-1} b_p b_{p+1} & \cdots b_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

qui représente une *substitution monocyclique* ; le *cycle* est $b_1 b_2 \ldots b_{p-1} b_p$, c'est un arrangement quelconque des $n-1$ nombres 2, 3, ... n pris p à p. Le nombre total de réussites est donc égal à celui des arrangements de $n-1$ nombres pris à 1 à 1, 2 à 2, ... $n-1$ à $n-1$; toutefois il faut y comprendre la *substitution identique*

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \\ 1\,2\,3 \cdots n \end{pmatrix}$$

ou la réussite sans déplacement de boule (ou d'urne), qu'on peut faire correspondre au symbole $A_{n-1,0} = 1$. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2} + \cdots + A_{n-1,n-1}}{P_n},$$

ce qui s'accorde avec le résultat trouvé par M. Stuyvaert.

(J. Neuberg).

×3. *Formules combinatoires.* On a, par les formules connues du calcul des différences,

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta^2 \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \Delta \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = -4 \sin^2 \frac{h}{2} \sin(x+h),$$

$$\Delta^5 \sin x = -2^5 \sin^5 \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{3h}{2}\right),$$

Digitized by Google

$$\Delta^4 \sin x = 2^4 \sin^4 \frac{h}{2} \sin (x + 2h);$$

en général,

$$\Delta^{2n} \sin x = (-1)^n 2^{2n} \sin^{2n} \frac{h}{2} \sin (x + nh),$$

$$\Delta^{2n+1} \sin x = (-1)^n 2^{2n+1} \sin^{2n+1} \frac{h}{2} \cos \left[x + \frac{(2n+1)h}{2}\right] (*).$$

Or on a, d'autre part,

$$\Delta^{2n} \sin x = \sin x - C_{2n,1} \sin(x+h) + C_{2n,2} \sin(x+2h) - \cdots + \sin(x+2nh),$$

$$\Delta^{2n+1} \sin x = -\sin x + C_{2n+1,1} \sin (x+h) - C_{2n+1,2} \sin (x+2h) + \cdots + \sin [x + (2n+1)h].$$

D'où les formules

$$(A) \begin{cases} \sin x - C_{2n,1} \sin (x+h) + C_{2n,2} \sin (x+2h) - \cdots + \sin(x+2nh) \\ \qquad = (-1)^n 2^{2n} \sin^{2n} \frac{h}{2} \sin (x + nh) \\ \sin x - C_{2n+1,1} \sin(x+h) + C_{2n+1,2} \sin(x+2h) - \cdots - \sin[x+(2n+1)h] \\ \qquad = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \sin^{2n+1} \frac{h}{2} \cos \left[x + \frac{(2n+1)h}{2}\right]. \end{cases}$$

Faisons $h = 2\pi$: les deux formules donnent, en remplaçant $2n$ ou $2n+1$ par m,

$$\sin x - C_{m,1} \sin x + C_{m,2} \sin x - C_{m,5} \sin x + \cdots \pm \sin x = 0,$$

d'où la relation connue

$$1 - C_{m,1} + C_{m,2} - C_{m,5} + \cdots \pm 1 = 0.$$

En faisant $h = \pi$ et divisant par $\sin x$, on obtient

$$1 + C_{m,1} + C_{m,2} + C_{m,5} + \cdots + 1 = 2^m.$$

Par la substitution de $\pi + h$ à h, les formules (A) deviennent

$$\sin x + C_{m,1} \sin(x+h) + C_{m,2} \sin(x+2h) + \cdots + \sin(x+mh)$$
$$= 2^m \sin^m \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{m}{2} h\right).$$

(*) On trouve assez facilement ces formules et beaucoup d'autres relatives aux sinus et aux cosinus, en calcul des différences, en se servant des identités

$$2i \sin x = e^{xi} - e^{-xi}, \quad 2 \cos x = e^{xi} + e^{-xi},$$

et observant que les exponentielles ordinaires se comportent en algèbre comme les exponentielles réelles. (P. M.)

Digitized by Google

Cette dernière donne, pour $x = 2k\pi$,

$$C_{m,1} \sin h + C_{m,2} \sin 2h + \cdots + C_{m,m} \sin mh = 2^m \sin^m \frac{h}{2} \sin \frac{m}{2} h.$$

Le lecteur peut s'exercer à tirer d'autres conséquences de ces formules.

(M. STUYVAERT.)

×3. *Une application de la théorie de l'inversion.* Soient A, B deux points fixes et M un point variable d'une circonférence O. On sait que l'angle AMB est constant. Si l'on transforme la figure par inversion en prenant pour pôle un point P de la circonférence O, on trouve le théorème suivant :

On considère sur une droite donnée deux points fixes A, B et un point mobile M. Si P est un point fixe extérieur à la droite AB, les circonférences PAM, PBM se coupent sous un angle constant.

La démonstration directe de cette proposition ne présente pas de difficulté. (ORLANDO).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE POSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1899;

par M. A. GOB, professeur à l'Athénée de Hasselt.

Nous démontrerons le théorème suivant qui généralise la question posée au concours général(*).

Etant données une conique (c) *et deux tangentes fixes d et d' à cette conique, on décrit un cercle variable* (c') *tangent aux droites d et d'. Le lieu du point d'intersection des deux tangentes communes autres que d et d' aux courbes* (c) *et* (c') *se compose des deux coniques homofocales à la conique* (c) *et passant par le point d'intersection des droites d et d'.*

La démonstration de cette proposition dépend évidemment du théorème suivant : *si par deux points pris à volonté sur une conique homofocale à une conique* (c), *on mène à la conique* (c) *des couples de tangentes, ces quatre droites sont tangentes à une même circonférence.*

Nous donnerons deux démonstrations de ce théorème.

(*) Voir *Mathesis*, 1899 (2), IX, pp. 250-252 les solutions de M. Déprez. La question est la suivante : *Par un point donné sur une ellipse, on fait passer une série de cercles tangents en ce point à l'ellipse. On mène les tangentes communes aux deux courbes. Quel est le lieu de leur point de rencontre?*

Digitized by Google

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. Soient une conique (C), F l'un de ses foyers, Δ la directrice correspondante, et (C′) une circonférence coupant la conique (C) aux points A, B, C, D, les droites AC et BD étant également inclinées sur Δ, on peut décrire une circonférence (C″) tangente à AC et à BD aux points E et H où ces droites rencontrent Δ.

Transformons la figure par polaires réciproques par rapport au point F; les lignes (C) et (C′) auront pour transformées, la première une circonférence (*c*) ayant pour centre le pôle O de Δ et la seconde une conique (*c′*) ayant le point F pour foyer. Les polaires des points A, B, C, D, sont quatre tangentes communes aux courbes (*c*) et (*c′*), et les droites AC et BD ont pour pôles deux sommets opposés M et N du quadrilatère MPNQ formé par ces tangentes. Enfin les points E et H ont pour polaires les droites OM et ON; la circonférence (C″) se transforme donc en une conique (*c″*) ayant F pour foyer et tangente aux droites OM et ON aux points M et N. Si F′ est le second foyer de la conique (*c′*), la droite MF′ étant symétrique de MF par rapport à OM, passera par le second foyer de la conique (*c″*). De même NF′ passe par ce second foyer; ce point est donc F′ et les coniques (*c′*) et (*c″*) sont homofocales. On a donc le théorème suivant qui est équivalent au théorème énoncé plus haut :

Etant données une circonférence (*c*) *et une conique* (*c′*), *on mène à ces courbes quatre tangentes communes; deux sommets opposés du quadrilatère formé par ces tangentes sont situés sur une conique* (*c″*) *homofocale à la conique* (*c′*).

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. Il suffirait pour établir le théorème précédent de démontrer que l'on a $MF \pm MF' = NF \pm NF'$, ce qui revient à dire que les droites MF, MF′, NF, NF′, sont tangentes à une même circonférence, qui doit d'ailleurs être concentrique au cercle (*c*) puisque les droites OM et ON sont les bissectrices des angles FMF′, FNF′. Il est plus simple de démontrer la réciproque de cette proposition que l'on peut énoncer comme il suit :

Etant donné un quadrilatère circonscrit MPNQ *à un cercle* (C), *on mène par deux sommets opposés* M *et* N *de ce quadrilatère des tangentes à un cercle concentrique au cercle* (C). *Deux sommets opposés* F *et* F′ *du quadrilatère formé par ces tangentes sont les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère* MNPQ.

Il suffira de démontrer que les droites PF et PF′, QF et QF′ sont

Digitized by Google

isogonales par rapport aux angles P et Q. Transformons la figure par polaires réciproques par rapport au cercle (σ). Si l'on observe que deux droites isogonales par rapport à l'un des angles M, N, P, Q ont pour polaires des points situés à égale distance du centre du cercle (σ), on voit que l'on est ramené à démontrer le théorème suivant.

Soit ABCD *un quadrangle inscrit dans un cercle* (C). *Une circonférence concentrique à la circonférence* (C) *coupe le côté* AD *aux points* R *et* S, *le côté* BC *aux points* T *et* U; *les droites* RT *et* SU *rencontrent les côtés* AB *et* P'Q' *en des points symétriques par rapport aux milieux de ces côtés.*

Le théorème se démontre facilement. En effet, soient α et β les points de rencontre des droites RT et SU avec AB et X le point de concours des côtés AD et BC; le triangle ABX coupé par les sécantes RT et SU donne :

$$\frac{\alpha B}{\alpha A}=\frac{TB}{TX}\times\frac{RX}{RA},\quad \frac{\beta B}{\beta A}=\frac{UB}{UX}\times\frac{SX}{SA}.$$

D'où, par multiplication,

$$\frac{\alpha B}{\alpha A}\times\frac{\beta B}{\beta A}=\frac{TB.UB}{RA.SA}\times\frac{RX.SX}{TX.UX}.$$

Le second membre de cette égalité est égal à l'unité, car les points A et B étant équidistants du centre du cercle RSTU ont même puissance par rapport à ce cercle. On a donc

$$\frac{\alpha B}{\alpha A}=\frac{\beta A}{\beta B},\quad \text{d'où}\quad \alpha B=\beta A.$$

Note. Sur la question de concours de 1899, voir dans *Mathesis*, 1881, (1) I, pp, 53-57, l'article intitulé : *Sur un lieu géométrique* (P. Ruex), avec une longue note de M. Neuberg où sont analysées ou indiquées les solutions de J. Serret, Gerono, Breton de Champ, J. Neuberg et Mister, P. Serret, le P. Lecointe, pour la question proposée ou pour la question généralisée. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 889.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 264).

Une montre a 3 *aiguilles égales des heures, minutes, secondes et de même pivot. On demande s'il viendra un moment où les* 3 *aiguilles auront leurs extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral.*

Digitized by Google

Solution par M. Emmerich. Supposons que la chose arrive si l'aiguille des heures se trouve à x, l'aiguille des minutes à $(x+20)$ et l'aiguille des secondes à $(x+40)$ minutes après 12 heures. On a

$$x : (60n + x + 20) = 1 : 12, \quad x : (60n' + x + 40) = 1 : 720$$

et, après l'élimination de x,

$$(3n+1) : (3n'+2) = 11 : 719 = (3a+2) : (3a'+2).$$

C'est impossible, car

$$(3n+1)(3a'+2) = \mathscr{M}\, 3+2, \text{ et } (3n'+2)(3a+2) = \mathscr{M}\, 3+1.$$

En supposant que l'aiguille des heures se trouve à x, l'aiguille des secondes à $(x+20)$ et l'aiguille des minutes à $(x+40)$ minutes après 12 heures, on trouve

$$(3n+2) : (3n'+1) = 11 : 719,$$

également impossible. Il n'y a pas d'autres cas à distinguer.

Solution par M. J. Gillet. Plus généralement, les points M_1, M_2, M_3 de vitesses respectives v_1, v_2, v_3 $(v_1 < v_2 < v_3)$ se mouvant sur une circonférence à partir d'une origine commune O, et dans le même sens; on demande s'il viendra un moment où le triangle $M_1M_2M_3$ sera semblable à un triangle donné $A_1A_2A_3$.

Prenons O pour origine des espaces, et soient α_3, α_1, α_2 les arcs sous-tendus par M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 au bout du temps cherché.

Prenons comme inconnue $OM_1 = x$; alors

$$OM_2 = x + \alpha_3 + 2k\pi, \quad OM_3 = x - \alpha_2 + 2k'\pi,$$

k et k' étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, qu'il s'agit de déterminer.

Les espaces parcourus étant proportionnels aux vitesses, on doit avoir

$$\frac{x}{v_1} = \frac{x + \alpha_3 + 2k\pi}{v_2} = \frac{x - \alpha_2 + 2k'\pi}{v_3}; \qquad (1)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{2k\pi + \alpha_3}{v_2 - v_1} = \frac{2k'\pi - \alpha_2}{v_3 - v_1},$$

puis

$$2k'\pi(v_2 - v_1) - 2k\pi(v_3 - v_1) = (v_3 - v_1)\alpha_3 + (v_2 - v_1)\alpha_2. \qquad (2)$$

Si la quantité $(v_3 - v_1)\alpha_3 + (v_2 - v_1)\alpha_2$ est exactement divisible par 2π, et si $v_3 - v_1$ et $v_2 - v_1$ sont deux nombres entiers premiers entre eux, l'équation (2) est résoluble en nombres entiers.

Digitized by Google

A chaque couple de valeurs de k et k' correspond une valeur de x donnée par les équations (1). On a ensuite

$$t = \frac{x}{v_1}$$

comme réponse à la question.

En particulier, si le triangle donné $A_1A_2A_3$ est équilatéral, on a

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2\pi}{3};$$

pour que l'équation (2) soit résoluble en nombres entiers, on doit avoir

$$v_2 + v_3 - 2v_1 = \mathscr{M}.3.$$

Cette condition n'est pas remplie si M_1, M_2, M_3 sont les extrémités des aiguilles d'une montre; donc, etc.

Cette solution pourrait être plus explicite, quant au choix des unités de temps et de longueur. On peut prendre pour unité de temps le temps que met l'aiguille M_3 à parcourir le cadran, pour unité de longueur la longueur de la circonférence du cadran. Nous laissons au lecteur le soin de modifier et de rectifier la solution de M. Gillet dans le sens qui vient d'être d'indiqué.

M. Hacken expose une autre méthode, très ingénieuse; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

M. Delahaye a traité le problème plus général où l'une des aiguilles est la bissectrice de l'angle des deux autres.

Question 939.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 127).

Un triangle ABC *se déplace de telle façon que les extrémités du côté* BC *qui a une longueur constante, décrivent deux courbes données et que le côté* AB *soit tangent à une troisième courbe donnée. On demande de construire la tangente à la trajectoire de* M *et de déterminer le point de contact de* AC *avec son enveloppe* : 1° *si l'angle* C *reste constant;* 2° *si le côté* AC *a une longueur constante.* (L. Meurice).

Soient BB′, CC′, les tangentes aux trajectoires des points B, C, et soit E le point de contact de AC avec son enveloppe. La longueur BC étant invariable, le point de concours O des normales en B et C est le centre instantané de rotation de BC; donc les vitesses BB′, CC′, des points B, C sont proportionnelles à OB, OC.

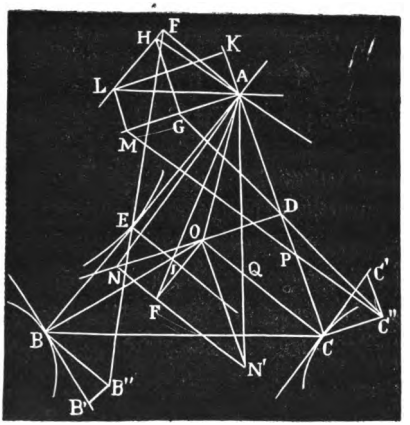
1° Si l'angle C reste constant, O est aussi le centre instantané de rotation de CA; donc la projection D de O sur CA est le point de contact de

Digitized by Google

CA avec son enveloppe. Nous pouvons maintenant déterminer les vitesses de circulation de A autour des points D, E. Celle de C étant la projection CC″ de CC′ sur une normale à CA, nous menons C″D qui coupe en G une normale en A à AC; de même en projetant BB′ en BB″ sur une normale en AB et en traçant B″E qui coupe en F la perpendiculaire élevés en A sur AB, on obtient la vitesse de circulation AF de A autour de E. Un quadrangle birectangle construit sur AG, AF détermine la vitesse AH de A.

2° Si la longueur AC est constante, nous connaissons la vitesse de glissement AK = C″C′ de A sur CA. La règle du quadrilatère des vitesses appliquée aux vitesses partielles AF, AK de A fait connaître la vitesse définitive AL de A. La vitesse de circulation de A considérée sur AC étant la projection AM de AL sur AG, et celle de C étant CC″, la droite C″M coupe AC au point de contact P de l'enveloppe.

Autre solution. On peut fonder la solution exclusivement sur la



théorie du centre instantané de rotation; dans ce qui suit, toutes les vitesses seront portées sur des perpendiculaires à leurs directions.

1° Nous représentons les vitesses de B et C sur leurs trajectoires par BO, CO. Si la distance CA était invariable, la vitesse de A serait AO; comme il suffit de supposer encore à A une vitesse dirigée suivant CA pour tenir compte du changement de la distance CA, l'extrémité N de la vitesse effective de A est sur la droite OD perpendiculaire à AC.

Si l'on considère la droite BA comme entraînée par son point B, elle a un centre instantané I à la rencontre de BO avec la normale en E à

Digitized by Google

AB. Les vitesses de B et de A, si la distance BA était constante, seraient proportionnelles à BI et AI ; celle de B étant déjà supposée égale à BO, on obtiendrait celle de A en menant à AB une parallèle OF′(*) qui coupe AI en F′. Cette vitesse AF′ se combinant avec une vitesse de A le long de BA; l'extrémité de la vitesse effective se trouve donc sur la droite F′N perpendiculaire à AN, en N à la rencontre avec DO. AN est la normale à la courbe (A).

2° On vient de voir que l'extrémité de la vitesse de A cousidérée sur la droite BA est sur NF′; supposons-là en N′. AC ayant une longueur invariable, le centre instantané de rotation de AC est à la rencontre Q des normales CO, AN′ des trajectoires des points C,A et les vitesses de ces points sont proportionelles à QC, QA. Mais la vitesse de C a déjà été représentée par CO ; donc si l'on mène ON′ parallèle à AC, l'extrémité de la vitesse de A est sur cette parallèle, et comme elle se trouve aussi sur NF, elle est déterminée par l'intersection de deux droites.

(J. NEUBERG).

Question 1096.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 264).

Trouver les lieux du centre, des foyers et des sommets des coniques inscrites dans un triangle donné ABC *et dont les axes ont des directions données* δ,δ'. (DÉPREZ)

Solution analytique par M. HACKEN. Soient

$$x\cos\alpha_r + y\sin\alpha_r = \sqrt{a^2\cos^2\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r},\quad (r=1,2,3) \qquad (1)$$

les équations de BC, CA, AB par rapport aux axes Ox, Oy de l'une des coniques. Les angles α_1, α_2, α_3 sont connus, ce sont les inclinaisons des hauteurs de ABC sur δ; a et b sont variables.

1° *Lieu du centre.* Appelons δ_1, δ_2, δ_3 les distances du centre O à BC, CA, AB. On déduit de (1)

$$\delta_r^2 = a^2\cos\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r;$$

éliminant a^2 et b^2, on a pour le lieu cherché

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \cos^2\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \\ \delta_2^2 & \cos^2\alpha_2 & \sin^2\alpha_2 \\ \delta_3^2 & \cos^2\alpha_3 & \sin^2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Dans la figure, F sur NN′, doit être remplacé par F′.

Digitized by Google

Ce lieu est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à δ, δ' ; car les points à l'infini sur ces directions sont des foyers de paraboles inscrites à ABC et ayant un axe parallèle à δ ou δ'.

2. *Lieu des foyers.* Soient maintenant δ_1, δ_2, δ_3 les distances d'un foyer à BC, CA, AB; de (1) on conclut

$\delta_r = c\cos\alpha_r - \sqrt{a^2\cos^2\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r}$, ou $\delta_r^2 - 2\delta_r c\cos\alpha_r - b^2 = 0$.

L'élimination de b et c donne pour le lieu des foyers la cubique

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\cos\alpha_1 & 1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\cos\alpha_r & 1 \\ \delta_3^2 & \delta_3\cos\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les foyers appartenant à l'axe désigné ci-dessus par Oy vérifient l'équation

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\sin\alpha_1 & 1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\sin\alpha_2 & 1 \\ \delta_3^2 & \delta_3\sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

car il suffit d'intervertir les noms des axes ou de remplacer les angles α_1, α_2, α_3 par leurs compléments.

3° *Lieu des sommets.* On a maintenant :

$$\delta_r = a\cos\alpha_r + \sqrt{a^2\cos^2\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r},$$

ou

$$\delta_r^2 - 2\delta_r a\cos\alpha_r - b^2\sin^2\alpha_r = 0;$$

le lieu des sommets a donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\cos\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\cos\alpha_2 & \sin^2\alpha_2 \\ \delta_3^2 & \delta_3\cos\alpha_3 & \sin^2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\sin\alpha_1 & \cos^2\alpha_1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\sin\alpha_2 & \cos^2\alpha_2 \\ \delta_3^2 & \delta_3\sin\alpha_3 & \cos^2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Solution géométrique par M. Jeřabeck. Nous désignons par I, I′, I″, I‴ les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC.

1° Menons une droite quelconque d parallèle à δ et considérons-la comme axe principal d'une conique K^2 inscrite à ABC.

Pour trouver le centre O et les foyers E, F de K^2 situés sur d, nous désignons par (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) les points de rencontre de d avec les bissectrices (AI, AI″), (BI, BI′), (CI, CI″) ; ces points se correspondent dans une involution (I) ayant pour points doubles E et F, pour point central O. Pour construire les éléments doubles, nous projetons l'involu-

Digitized by Google

tion (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) à partir de A sur la circonférence ABC suivant l'involution (A'_1A_2, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$). Les cordes $A'_1A'_2$, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$ concourent au pôle P de la seconde involution (I'), les droites $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$, $A'_1B'_2$ et $A'_2B'_1$ se coupent sur l'axe p, qui rencontre la circonférence aux points doubles ε, φ de (I'). Les droites $A\varepsilon$, $A\varphi$ rencontrent d aux points cherchés E,F.

Le lieu de ces points est une cubique; car sur toute droite d parallèle à δ nous avons trois points du lieu, savoir les deux points E,F que nous venons de déterminer et le foyer à l'infini de la parabole inscrite à ABC et dont les diamètres sont parallèles à δ.

Les points E,F sont aussi donnés comme points d'intersection de la droite d avec la transformée de d par inversion triangulaire. Cette transformée est une conique passant par A,B,C et par l'inverse du point à l'infini sur δ. Lorsque d se transporte parallèlement à δ, cette droite et sa transformée par inversion engendrent un faisceau de rayons et un faisceau de coniques qui sont projectifs. — Il résulte de là que les foyers appartiennent à une cubique circulaire. (La droite à l'infini a pour ligne inverse la circonférence ABC, de sorte que les points cycliques font partie du lieu des foyers).

2° Pour obtenir le centre O sans passer par les foyers, nous construisons sur A_1B_1 et B_2A_2 deux triangles homothétiques $L_1A_1B_1$, $L_2B_2A_2$ (L_2B_2 parallèle à L_1A_1,...); la droite L_1L_2 coupe d au point central O de l'involution (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2).

Prenons pour L_1 le centre I du cercle inscrit à ABC; L_2 décrit alors une ponctuelle semblable à celles des points A_1, B_1, A_2, B_2. Par suite, le lieu du point O est engendré par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectifs de rayons, dont l'un a pour sommet le point à l'infini sur δ et l'autre le point I; ce lieu est donc une hyperbole H^2 dont les asymptotes sont parallèles aux directions δ, δ'.

3° Désignons par S un sommet de K^2 situé sur d, et par s la tangente en S. Si l'on donne s, pour trouver d, nous cherchons d'abord le centre O comme intersection de l'hyperbole H^2 avec la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les tangentes s, BC, CA, AB. Il résulte de là qu'il existe deux coniques K^2, K'^2 ayant même tangente au sommet S.

Sur chaque droite s parallèle à δ', nous trouvons ainsi deux points du lieu des sommets; mais le point à l'infini sur s est le sommet à l'infini

Digitized by Google

d'une parabole inscrite à ABC et dont les diamètres sont parallèles à δ'. Le lieu est donc une cubique.

M. E. N. Barisien a résolu la même question.

Pour trouver le centre O de K^2, on peut construire la symétrique d' de BC par rapport à d, puis la droite unissant les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes BC, CA, AB, d. Sur chaque droite d on trouve ainsi un centre; mais le point à l'infini sur d' est le centre de la parabole inscrite à ABC et dont les diamètres sont parallèles à d. Par conséquent, le lieu du centre est une conique.

Question 1166.

(Voir *Mathésis* (2) VIII, p. 104).

a, b, c, x, y désignant des quantités complexes, si l'on suppose

$$y = ax^2 + bx + c,$$

comment construit-on le point y qui correspond à un point donné x?

Solution par M. Emmerich. Représentons les points a, b, c, x de la manière usuelle dans un système de coordonnées rectangulaires avec l'origine O. Après avoir marqué le point 1 sur l'axe OX on construit sur Ox un triangle directement semblable au triangle O1a; le sommet sera le point ax. Par ax on mène une droite parallèle et égale à Ob, ce qui conduit au point $ax + b$.

En écrivant $y = (ax + b)x + c$ on voit qu'il ne s'agit alors que d'une répétition en prenant $ax + b$, c au lieu de a, b.

Remarque. Si le point x décrit une droite, le point $ax + b$ décrit aussi une droite, car les systèmes (x) et (ax) sont semblables et les systèmes (ax) et $(ax + b)$ sont égaux. Le point x^2 décrit en général une parabole; il en est de même des points ax^2, $a(x - \lambda)^2$, $a(x - \lambda)^2 + \mu$; la dernière expression peut être identifiée à $ax^2 + bx + c$.

Pour démontrer analytiquement que le point $z \equiv x^2$ décrit une parabole, posons

$$z = z_1 + z_2 i = (x_1 + x_2 i)^2 = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 i, \quad z_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad z_2 = 2x_1 x_2.$$

On en conclut

$$x_1^2 = \tfrac{1}{2}(z_1 + \sqrt{z_1^2 + z_2^2}), \quad x_2^2 = \tfrac{1}{2}(-z_1 + \sqrt{z_1^2 + z_2^2}).$$

Soit $lx_1 + mx_2 = n$ le lieu du point x. On a

$$l^2 x_1^2 + 2lmx_1 x_2 + m^2 x_2^2 = n^2,$$

Digitized by Google

$$(l^2+m^2)\sqrt{z_1^2+z_2^2}+(l^2-m^2)z_1+2lmz_2=2n^2,$$

$$(l^2+m^2)^2(z_1^2+z_2^2)=(l^2-m^2)^2z_1^2+4lm(l^2-m^2)z_1z_2 + 4l^2m^2z_2^2+pz_1+qz_2+r,$$

$$4l^2m^2z_1^2-4lm(l^2-m^2)z_1z_2+(l^2-m^2)^2z_2^2=pz_1+qz_2+r,$$

ce qui représente une parabole.

La même parabole sera décrite par z quand x parcourt la droite

$$lx_1+mx_2=-n.$$

Lorsque $n=0$, le point z décrit la droite

$$2lmz_1=(l^2-m^2)z_2.$$

NOTE. On passe du point x au point x' en construisant sur Ox un triangle Oxx' semblable au triangle $O1x$. Si r, θ sont les coordonnées polaires de x, celles de x' sont r^2, 2θ; par suite, si le point x décrit une courbe $f(r,\theta)=0$, l'équation du lieu de x' est $f(\sqrt{r},\frac{1}{2}\theta)=0$. On en conclut immédiatement que la droite

$$r=\frac{a}{\cos(\theta-\alpha)}$$

a pour transformée la parabole

$$r=\frac{a^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\alpha\right)}=\frac{2a^2}{1+\cos(\theta-2\alpha)}.$$

L'intérêt principal de la question 1166 consistait à montrer que la transformation $y=ax^2+bx+c$, par une translation, une homothétie et une seconde translation se ramène à la transformation $y=x^2$.

(J. N.)

×Question 1198.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 280).

Eliminer x et y entre les équations

$$\cos x+\cos y=a,\quad \operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}y=b,\quad \operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}y=c.$$

(WILKINSON).

Solution par M. E. N. BARISIEN. La première équation s'écrit

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a. \tag{1}$$

Digitized by Google

En divisant membre à membre les deux dernières, on trouve

$$(2) \qquad \frac{\sin(x+y)}{\sin x+\sin y}=\frac{\cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}}=\frac{b}{c}.$$

De (1) et (2), on tire immédiatement

$$(3) \qquad \cos\frac{x-y}{2}=\sqrt{\frac{ac}{2b}},\quad \cos\frac{x+y}{2}=\sqrt{\frac{ab}{2c}},$$

$$\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=2\sqrt{\frac{ab}{2c}\left(1-\frac{ab}{2c}\right)}.$$

Or, la seconde équation s'écrit

$$\sin(x+y)=b\sin x\sin y=\frac{b}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=$$

$$b\left(\cos^2\frac{x-y}{2}-\cos^2\frac{x+y}{2}\right).$$

En y portant les valeurs (3), on a pour résultat de l'élimination de x et y:

$$4b(2c-ab)=a(b^2-c^2)^2.$$

La même question a été résolue par M. M. Sintsof (Kazan), Van Dorsten (Rotterdam), Emmerich (Mülheim) et Delahaye (Roye).

×Question 1224.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p 152)

Calculer le rayon du cercle inscrit à un triangle ABC, *en fonction des distances* α, β, γ *de son centre aux trois sommets.*

Solution par MM. E. N. Barisien, Déprez et Delahaye (Roye). Si r est le rayon du cercle inscrit, on a

$$(1) \qquad \sin\frac{A}{2}=\frac{r}{\alpha},\quad \sin\frac{B}{2}=\frac{r}{\beta},\quad \sin\frac{C}{2}=\frac{r}{\gamma}.$$

Or, de ce que $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^0$, il résulte la relation

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1.$$

Digitized by Google

En y portant les valeurs (1), il vient

$$\frac{1}{r^3}-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{1}{r}-\frac{2}{\alpha\beta\gamma}=0. \tag{2}$$

Le rayon r dépend donc de l'équation (2) qui est du troisième degré. La condition de réalité des trois racines est

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)^3\geq\frac{27}{\alpha^2\beta^2\gamma^2},\quad\text{ou}\quad\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\geq\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}};$$

elle est toujours vérifiée, puisque la moyenne arithmétique de trois nombres est supérieure ou égale à la moyenne géométrique. L'équation (2) ayant une seule variation, admet une racine positive et deux racines négatives.

Remarque. Soit maintenant ρ le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A. Si α, β, γ désignent encore les distances du centre de ce cercle aux trois sommets, on a

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\rho}{\alpha},\quad\cos\frac{B}{2}=\frac{\rho}{\beta},\quad\cos\frac{C}{2}=\frac{\rho}{\gamma},$$

avec la relation

$$\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1;$$

de sorte que l'équation qui donne ρ s'écrit

$$\frac{1}{\rho^3}-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\alpha\beta\gamma}=0. \tag{3}$$

C'est l'équation (2) où r est remplacé par $-\rho$; donc une racine négative de (2) correspond à un cercle exinscrit.

Solution par M. Clavero y Guervos. On a

$$p-a=\sqrt{\alpha^2-r^2},\quad p-b=\sqrt{\beta^2-r^2},\quad p-c=\sqrt{\gamma^2-r^2};$$

d'où, par addition et par multiplication,

$$p=\sqrt{\alpha^2-r^2}+\sqrt{\beta^2-r^2}+\sqrt{\gamma^2-r^2},$$

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\sqrt{(\alpha^2-r^2)(\beta^2-r^2)(\gamma^2-r^2)}.$$

On sait que

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p};$$

Digitized by Google

donc l'équation cherchée est

$$r^2(\sqrt{\alpha^2-r^2}+\sqrt{\beta^2-r^2}+\sqrt{\gamma^2-r^2})=\sqrt{(\alpha^2-r^2)(\beta^2-r^2)(\gamma^2-r^2)},$$

ou, sous forme rationnelle,

$$r^6-\frac{(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}r^4+\frac{1}{2}(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)r^2-\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2\gamma^2=0.$$

Solutions par M. Emmerich. 1° I désignant le centre du cercle inscrit, et A_1, B_1, C_1 les points de contact des côtés avec ce cercle, la surface BIC a pour expressions

$$\frac{1}{2}ar \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\beta\gamma \sin \mathrm{BIC}=\frac{1}{2}\beta\gamma\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\beta\gamma\frac{p-a}{\alpha};$$

on en conclut

$$\alpha ar=\beta\gamma(p-a),$$

ou

$$\frac{\beta\gamma}{r}(p-a)-\alpha(p-b)-\alpha(p-c)=0.$$

Entre cette équation et les deux analogues, éliminons $p-a$, $p-b$, $p-c$, etc.

2° Si l'on appelle λ, μ, ν les angles BIA_1, CIB_1, AIC_1, on a $\lambda+\mu+\nu=\pi$, d'où

$$1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu-2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=0.$$

Or

$$\cos\lambda=\frac{r}{\alpha}, \quad \cos\mu=\frac{r}{\beta}, \quad \cos\nu=\frac{r}{\gamma};$$

substituons ces valeurs, etc.

Cette solution est immédiatement applicable au triangle sphérique; on trouve

$$\cot^3 r-\cot r.\Sigma\cot^2\alpha-2\cot\alpha\cos\beta\cot\gamma=0.$$

L'équation trouvée par M. Clavero y Guervos se décompose dans les deux équations de la première solution.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

223. Etant donnée la fraction $\frac{m}{n}$: 1° Trouver les nombres entiers $a, b, c\ldots$ tels que l'on ait

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{15}+\frac{b}{15^2}+\frac{c}{15^3}+\cdots;$$

Digitized by Google

2° Chercher la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre de cette égalité se compose d'un nombre limité de termes. 3° Cette condition étant remplie, quel sera le nombre des fractions à calculer ?

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, 1898).

La question revient à transporter dans le système à base 15 la théorie des fractions décimales.

923. On donne deux triangles ABC, A'B'C'. Si le point M est tel que MA, MB, MC coupent respectivement B'C', C'A', A'B' en trois points A_1, B_1, C_1 en ligne droite, inversement MA', MB', MC' couperont respectivement BC, CA, AB en trois points A_2, B_2, C_2 également en ligne droite. (*Journal de Vuibert*).

On a :

$$\frac{B'A_1}{C'A_1}=\frac{B'AM}{C'AM},\quad \frac{C'B_1}{A'B_1}=\frac{C'BM}{A'BM},\quad \frac{A'C_1}{B'C_1}=\frac{A'CM}{B'CM};\quad \frac{BA_2}{CA_2}=\frac{BA'M}{C'AM},\ldots$$

Faisons le produit des trois premières égalités, puis celui des trois dernières, etc.

924. On donne un parallélogramme ABB_1C; sur BB_1 on porte des longueurs $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4,\ldots$ égales à BB_1. Une droite quelconque menée par C rencontre les droites AB, AB_1, AB_2, AB_3, etc., aux points D, D_1, D_2, D_3, etc. Si l'on pose $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{n}$, démontrer que

$$\frac{AD_1}{D_1B_1}=\frac{1}{n+1},\quad \frac{AD_2}{D_2B_2}=\frac{1}{n+2},\ldots$$

(Biddle, *Ed. Times*.)

La 1re proportion se déduit de la considération des triangles semblables AD_1D, B_1D_1D ; les autres sont des conséquences de la première, car on peut substituer au parallélogramme ABB_1C le parallélogramme AB_1B_2C ou AB_2B_3C...., ce qui change n successivement en $n+1$, $n+2$,...

925. Démontrer les égalités

$$x^{m-1}\sqrt[m]{m}\sqrt[m]{\frac{x^m}{m}}=x^m,\quad a^{\frac{n\log(\log a)}{\log a}}=(\log a)^n,$$

$$\log(a-\sqrt{a^2-1})=-\log(a+\sqrt{a^2-1}),$$

$$\tfrac{7}{16}\log(3+2\sqrt{2})-4\log(\sqrt{2}+1)=\tfrac{25}{8}\log(\sqrt{2}-1),$$

$$2\log 3a-\log 2a-\log 4a=2\log 3-3\log 2.$$

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

1251. Une conique variable touche les côtés du triangle ABC aux points A′, B′, C′. Si les droites AA′, BB′, CC′ se coupent sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, la conique touche constamment la droite de Lemoine de ABC. (E. LEMOINE).

×1252. L'angle φ étant donné, on pose pour abréger

$$f(a, b, c) = \frac{\cos a.\ \cos b.\ \cos c}{\cos \varphi} + \frac{\sin a.\ \sin b.\ \sin c}{\sin \varphi} - 1;$$

démontrer que les quatre équations à six inconnues

$$f(X, y, z) = 0, \quad f(x, Y, z) = 0, \quad f(x, y, Z) = 0, \quad f(X, Y, Z) = 0,$$

ont une triple infinité de solutions. (G. FONTENÉ.)

1253. Par deux points donnés A, B faire passer une circonférence qui coupe une droite donnée m ou une circonférence donnée O sous un angle donné α. (ORLANDO)

Ce problème n'est pas nouveau ; nous le proposons parce qu'il est susceptible de plusieurs solutions. (J. N.)

1254. La somme des carrés des coefficients des différentes puissances de x dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m$$

est le cœfficient de x^{km} (coefficient maximum) dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^{2m}$$

(A. BOUTIN).

1255. Si le nombre $2m + 1$ est plus grand que 3 et premier avec 3, prouver que

$$\frac{(x^{6m+5} - y^{6m+5})(x - y)}{(x^{2m+1} - y^{2m+1})(x^5 - y^5)} = P^2 - xyQ^2,$$

où l'on a posé

$$P = (x + y)\,Q + x^m y^m, \quad Q = (x - y)\frac{(x^m - y^m)(x^{m+1} - y^{m+1})}{x^5 - y^5}.$$

(C. E. BICKMORE)

1256. Soient B, C deux points fixes d'une circonférence, A un point mobile sur cette courbe. Etudier la variation de l'aire du triangle compris entre la médiane et la hauteur issues de A dans le triangle ABC.

Même question pour le triangle ayant pour sommets le point A, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC.

Digitized by Google

NOTES SUR LES CONIQUES;

par M. H. MANDART.

1. *Equation quadratique des axes de symétrie d'une conique représentée par*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0.$$

On sait que les tangentes menées aux points de contact d'une conique et d'un cercle bitangents sont également inclinées sur les axes de la courbe. La droite des contacts est donc parallèle à l'un d'eux, et le centre du cercle se trouve par conséquent sur l'autre.

Le centre d'un cercle bitangent à une conique décrit donc l'un des axes de symétrie de la courbe.

Ce théorème permet de trouver aisément l'équation du couple des axes de symétrie. En effet, l'équation

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0$$

représente un cercle bitangent à la conique représentée par l'équation générale, quand on a les relations

$$l - \lambda^2 = m - \mu^2 \quad , \quad h = \lambda\mu;$$

le centre du cercle est déterminé par les équations

$$F'_x - 2(\lambda x + \mu y + \nu)\lambda = 0 \quad , \quad F'_y - 2(\lambda x + \mu y + \nu)\mu = 0.$$

Ses coordonnées satisfont donc aux relations

$$F'^2_x - F'^2_y = 4(\lambda x + \mu y + \nu)^2(\lambda^2 - \mu^2) = 4(\lambda x + \mu y + \nu)(l - m),$$
$$F'_x F'_y = 4(\lambda x + \mu y + \nu)^2 \lambda\mu = 4(\lambda x + \mu y + \nu)h,$$

ou à l'équation

$$F'^2_x - \frac{l - m}{h} F'_x F'_y - F'^2_y = 0,$$

laquelle représente par conséquent les axes de symétrie de la courbe.

2. *Formules qui donnent les coordonnées des foyers de la conique*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0.$$

On sait que les foyers d'une conique se trouvent aux points d'intersection des tangentes isotropes.

Si dans l'équation générale des tangentes de coefficient angulaire q,

$$Ny - F = q(Nx - G) \pm \sqrt{-\Delta(l + 2hq + mq^2)},$$

Digitized by Google

où N, F, G ont les valeurs

$$N = lm - h^2, \quad F = gh - lf, \quad G = hf - mg,$$

on remplace q respectivement par $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, on obtient les équations

$$Ny - F - (Nx - G)\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-\Delta(l - m + 2h\sqrt{-1})},$$

$$Ny + F + (Nx - G)\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-\Delta(l - m - 2h\sqrt{-1})},$$

pour ces tangentes. Ces quatre droites se rencontrent deux à deux aux quatre foyers de la conique donnée.

Les équations ci-dessus combinées donnent les égalités suivantes

$$(Ny - F)^2 + (Nx - G)^2 = \pm\Delta\sqrt{(l - m)^2 + 4h^2},$$

$$(Ny - F)^2 - (Nx - G)^2 = -\Delta(l - m), \quad (Ny - F)(Nx - G) = \Delta h. \quad (1)$$

Des deux premières on tire

$$2(Ny - F)^2 = -\Delta(l - m \mp \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2}),$$

$$2(Nx - G)^2 = \Delta(l - m \pm \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2}),$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant. En extrayant les racines carrées de chacune de ces égalités, on a, à cause de la troisième des relations (1),

$$2(Ny - F) = \pm\sqrt{-2\Delta(l - m \mp \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2})},$$

$$2(Nx - G) = \pm\sqrt{2\Delta(l - m \pm \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2})}.$$

Exemple. *Trouver les foyers de la conique représentée par l'équation*

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$

Pour cette courbe on a :

$$N = -6, \quad F = 3, \quad G = 0, \quad \Delta = 9,$$

$$-4y - 2 = \pm\sqrt{-2(3 \mp 5)}; \quad -4x = \pm\sqrt{2(3 \pm 5)}; \quad (-4y - 2)(-4x) = 8.$$

D'où pour les coordonnées des quatre foyers :

$$-4y - 2 = +\sqrt{-2(3 - 5)}; \quad -4x = +\sqrt{2(3 + 5)}; \quad x = -1, \; y = -1.$$

$$-4y - 2 = -\sqrt{-2(3 - 5)}; \quad -4x = -\sqrt{2(3 + 5)}; \quad x = 1, \; y = 0.$$

$$-4y - 2 = +\sqrt{-2(3 + 5)}; \quad -4x = -\sqrt{2(3 - 5}; \quad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}, \; y = -\tfrac{1}{2}(1 + 2\sqrt{-1}).$$

$$-4y - 2 = -\sqrt{-2(3 + 5)}; \quad -4x = +\sqrt{2(3 - 5)}; \quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}, \; y = -\tfrac{1}{2}(1 - 2\sqrt{-1}).$$

Digitized by Google

3. *Rayon du cercle osculateur en un point d'une conique*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0.$$

Supposons les axes de coordonnées rectangulaires; en les transportant parallèlement à eux-mêmes au point A (x', y') de la conique considérée, l'équation de la courbe devient

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + xF'_{x'} + yF'_{y'} = 0.$$

Si nous choisissons maintenant pour axes des coordonnées la tangente au point A et la normale au même point, l'équation de la conique prend la forme

$$l'x^2 + 2h'xy + m'y^2 + 2f'y = 0$$

avec les relations

$$F'^2_{x'} + F'^2_{y'} = 4f'^2, \quad \Delta = -l'f'^2.$$

De ces deux égalités, on tire

$$2\frac{f'}{l'} = \pm\frac{(F'^2_{x'} + F'^2_{y'})^{\frac{3}{2}}}{4\Delta}.$$

L'équation du cercle osculateur est donc, par rapport aux nouveaux axes,

$$x^2 + y^2 \pm \frac{(F'^2_{x'} + F'^2_{y'})^{\frac{3}{2}}}{4\Delta}y = 0;$$

et son rayon a par conséquent pour expression

$$\pm\frac{F'^2_{x'} + F'^2_{y'}}{8\Delta}.$$

Il devient infini quand la conique se réduit à deux droites.

4. *Carré de la distance du centre d'une conique*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0$$

au sommet d'un angle droit circonscrit. On rapporte la courbe aux côtés de l'angle comme axes des coordonnées, elle a alors une équation de la forme

$$a^2x^2 + 2h'xy + b^2y^2 + 2apx + 2bpy + p^2 = 0,$$

avec les relations

$$a^2 + b^2 = l + m, \quad h'^2 - a^2b^2 = h^2 - lm,$$

$$a^2b^2p^2 + 2abh'p^2 - a^2b^2p^2 - a^2b^2p^2 - h'^2p^2 = -p^2(h' - ab)^2 = \Delta.$$

Digitized by Google

Le carré de la distance considérée est, en désignant par x' et y' les coordonnées du centre

$$x'^2 + y'^2 = \frac{b^2p^2(h' - ab)^2}{(a^2b^2 - h'^2)^2} + \frac{a^2p^2(h' - ab)^2}{(a^2b^2 - h'^2)^2} = \frac{p^2(a^2 + b^2)(h' - ab)^2}{(a^2b^2 - h'^2)^2}$$
$$= -\frac{(l + m)\Delta}{(h^2 - lm)^2}.$$

Comme cette quantité est constante, on en conclut que le sommet d'un angle droit circonscrit à une courbe du second degré à centre décrit un cercle concentrique à la courbe et ayant pour rayon, la racine carrée de l'expression ci-dessus.

Corollaire. Pour une ellipse, la quantité $(l + m)\Delta$ est toujours négative.

5. ***Centre et asymptotes d'une conique réduite à un couple de droites.*** De ce que les discriminants des deux équations

$$F(x,y) \equiv lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0,$$
$$lx^2 + 2hxy + my^2 + xF'_{x'} + yF'_{y'} + F(x', y') = 0,$$

sont identiques, on conclut, Δ étant la valeur commune du discriminant, l'identité suivante

$$(lm - h^2)F(x',y') - \tfrac{1}{4}(lF'^2_{y'} - 2hF'_{x'}F'_{y'} + mF'^2_{x'}) = \Delta.$$

On peut l'écrire

$$4(lm - h^2)\left[F(x, y) + \frac{\Delta}{h^2 - lm}\right] = lF'^2_y - 2hF'_xF'_y + mF'^2_x.$$

Cette identité montre que si Δ est nul, l'équation du second degré représente un couple de droites et que le centre et les asymptotes du système dans ce cas, sont respectivement le point d'intersection des deux droites et ces droites elles-mêmes.

Elle montre également que les asymptotes d'une conique passent par le centre de la courbe.

6. ***Les asymptotes sont les tangentes issues du centre.*** La droite représentée par l'équation

$$y = qx + t,$$

est tangente à la courbe

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0,$$

quand l'équation

$$(l + 2hq + mq^2)x^2 + 2[(h + mq)t + g + fq] + mt^2 + 2ft + n = 0,$$

Digitized by Google

a ses racines égales. On a alors la relation

$$[(h+mq)t+g+fq]^2-(l+2hq+mq^2)(mt^2+2ft+n)=0,$$

de laquelle on tire

$$t=\frac{gh-lf-(hf-mg)q\pm\sqrt{-\Delta(l+2hq+mq^2)}}{lm-h^2}.$$

Les tangentes de coefficient angulaire q, sont donc représentées par l'équation

$$y-y'-q(x-x')\pm\frac{\sqrt{-\Delta(l+2hq+mq^2)}}{lm-h^2}=0.$$

Lorsque Δ est nul, toutes les tangentes passent par le centre.

Dans le cas d'une courbe non dégénérée, on a pour toute tangente passant par le centre l'égalité $l+2hq+mq^2=0$, qui montre que cette droite coïncide avec une asymptote.

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. E. Cesàro (*Suite*, v. p. 5).

8. Que faut-il pour que la droite $(\alpha, \beta, \ldots, \zeta)$ soit la NORMALE PRINCIPALE de quelque courbe ? Les coordonnées du point M_1 de cette courbe, qui appartient à la droite considérée d, ont toujours la forme (11); mais q n'a pas l'expression (13), parce que ce n'est plus la seconde condition (10) qui doit être vérifiée, mais seulement la première. Aussi, pour éviter toute confusion, nous désignerons dorénavant par q_0 la valeur (13) de q, et par q_0+q_1 celle que nous allons déterminer de manière que d soit la normale principale de (M_1). C'est q_0 qu'il faut substituer à q dans les formules (11) pour connaître le point de rencontre de d avec l'axe central de (M_1); mais c'est $q=q_0+q_1$ qu'il faut faire s'il s'agit de trouver M_1. Pour que d soit simplement *normale* à (M_1) il faut, en vertu de (17), que la condition (9) soit remplie. Cela posé, la direction de la tangente à (M_1) étant définie par les cosinus

$$a=\dot{x}\frac{ds}{ds_1},\quad b=\dot{y}\frac{ds}{ds_1},\quad c=\dot{z}\frac{ds}{ds_1}, \tag{18}$$

ou

$$\frac{ds_1}{ds}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2},$$

Digitized by Google

il suffit évidemment d'exprimer que les variations de ces cosinus sont proportionnelles à α, β, γ, ce qu'on peut, d'ailleurs, résumer en une seule relation, en se servant de l'égalité évidente

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & \dot{a} \\ \beta & b & \dot{b} \\ \gamma & c & \dot{c} \end{vmatrix}^2 = \Sigma\,(\gamma\dot{b} - \beta\dot{c})^2.$$

On voit par là, après avoir remplacé a, b, c par leurs valeurs (18), que la relation cherchée est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dot{x} & \ddot{x} \\ \beta & \dot{y} & \ddot{y} \\ \gamma & \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, si l'on remplace $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ par les valeurs (12), et $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ par les valeurs qu'on déduit des précédentes, on trouve

$$q^2\Sigma\,(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\,\ddot{\alpha} + q\left[2p_0\frac{d\sigma^3}{ds^3} - \Sigma\,(\dot{\alpha}\ddot{\xi} - \ddot{\alpha}\dot{\xi})\right]$$
$$+ 2\,(pp_1 - p_0q_0)\frac{d\sigma^3}{ds^3} + \Sigma\,(\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta})\left(\ddot{\xi} - \xi\frac{d\sigma^2}{ds^2}\right) = 0, \qquad (19)$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\Sigma\alpha\dot{\xi} = p_0\frac{d\sigma}{ds}, \quad \Sigma\dot{\alpha}\ddot{\xi} = p_1\frac{d\sigma^2}{ds^2},$$

de sorte que p_1 est le *paramètre de distribution* des plans tangents, sur la surface engendrée par d. Comme on devait s'y attendre, l'équation obtenue est du second degré en q. Cela tient à ce qu'il *peut* y avoir deux courbes (M_1), qui sont alors, nécessairement, deux courbes de Bertrand. Il peut se faire aussi qu'il y en ait une infinité, qui sont toujours des hélices circulaires, constituant le second système d'asymptotiques sur un *hélicoïde à plan directeur*. Pour que d engendre une pareille surface il faut donc, et il suffit, que les trois coefficients de l'équation (19) soient simultanément nuls.

9. Lorsque d passe par M on a $\xi = \eta = \zeta = 0$, et, par suite, $p = 0$, $p_0 = 0$. La condition (19) se réduit à

$$q^2\Sigma\,(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\ddot{\alpha} - q\Sigma\,(\dot{\alpha}\ddot{\xi} - \ddot{\alpha}\dot{\xi}) + \Sigma\,(\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta})\,\ddot{\xi} = 0, \qquad (20)$$

Digitized by Google

ou $dq = \alpha ds$. Si, par exemple, d est une normale, faisant un angle constant avec la normale principale, q doit avoir une valeur constante $-a$, et la relation (20) peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\beta}{\rho} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{a} - \frac{\gamma}{\rho}} = 0.$$

En particulier, pour $\beta = 0$, on voit qu'*il doit y avoir une relation linéaire entre les courbures de* (M) *afin que les normales principales de cette courbe jouent le même rôle par rapport à une autre courbe.* C'est là un théorème bien connu, qu'on doit à M. Bertrand. Pour $\gamma = 0$, on parvient à cet autre résultat connu : *les courbes dont les binormales sont les normales principales d'une autre courbe sont caractérisées par la relation*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{r} = 0. \tag{21}$$

Pour avoir un exemple de ces courbes, il suffit de rendre gauche une chaînette en lui donnant une torsion proportionnelle à l'arc.

10. Nous allons faire une autre application de la formule (19) en cherchant les courbes (M) *dont les axes centraux sont les normales principales d'une autre courbe* (M_1). Évidemment (M) et (M_1) appartiennent à une même famille, qu'il s'agit de caractériser au point de vue intrinsèque. Les coordonnées de l'axe central de (M) sont

$$\alpha = \cos\varphi, \quad \beta = \sin\varphi, \quad \gamma = 0, \quad \xi = -l\sin\varphi, \quad \eta = l\cos\varphi, \quad \zeta = 0,$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{r}{\rho}, \quad l = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}.$$

On trouve sans peine que $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\xi}, \dot{\eta}$ et $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}$ sont respectivement égaux aux premières et aux secondes dérivées de α, β, ξ, η, tandis que

$$\dot{\gamma} = 0, \quad \dot{\zeta} = 0, \quad \ddot{\gamma} = -\frac{\sin\varphi}{l}\frac{d\varphi}{ds}, \quad \ddot{\zeta} = l\frac{d}{ds}\frac{\sin\varphi}{l}.$$

Cela étant, la relation (19) devient

$$q^2\frac{\sin\varphi}{l} + q\frac{d}{ds}\frac{dl}{d\varphi} - l\frac{dl}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{l} = 0,$$

Digitized by Google

ou $dq = \cos\varphi . ds$. Il suffit de poser $q d\varphi = \operatorname{tg}\psi . dl$ pour que l'équation différentielle qui précède se réduise à $l d\psi = \sin\varphi . ds$. L'élimination de q et ψ entre les égalités

$$\frac{dq}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\operatorname{tg}\psi}{q}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{\sin\varphi}{l} \tag{22}$$

conduit à la relation intrinsèque cherchée :

$$\frac{(\rho^2 + r^2)(r d\rho - \rho dr)}{(\rho^2 - r^2) r d\rho - 2\rho^3 dr} \int \frac{\rho ds}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = r \operatorname{tang} \int \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho r} ds.$$

11. On peut avoir deux exemples fort simples en prenant $q = l$, $\psi = \pm\varphi$. Les équations (22) se réduisent alors aux deux qui suivent

$$\frac{dl}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \pm \frac{\sin\varphi}{l},$$

et celles-ci exigent que l'une ou l'autre des relations

$$l = a \sin\varphi, \quad l \sin\varphi = a$$

soit vérifiée. On trouve $l = a \sin\frac{s}{a}$ dans le premier cas, $l = \sqrt{a^2 + s^2}$ dans le second. Dans ce second cas, on a aussi $sr = a\rho$, et il est aisé de voir que les deux courbes sont(*) des géodésiques sur le cône engendré par les côtés d'un angle droit, qui tourne autour d'une bissectrice. Dans l'autre cas elles appartiennent à la famille caractérisée par l'équation

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}.$$

On trouve, en effet, que les équations intrinsèques de (M) sont

$$\frac{a}{\rho} = \sin\frac{s}{a}, \quad \frac{a}{r} = -\cos\frac{s}{a}.$$

Il est facile de construire ces courbes en partant de l'épicycloïde engendrée par un point P d'une circonférence de rayon $a\sqrt{2} - a$, qui roule sans glisser sur une circonférence de rayon $2a$. Soit PQ un rayon de courbure de l'épicycloïde (P). Sur ce rayon, comme diagonale, construisons le carré dans le plan perpendiculaire au plan de (P). Les extrémités M et M_1 de l'autre diagonale décrivent les courbes cherchées : MQ est la normale principale de (M) et l'axe central de (M_1),

(*) « *Geometria intrinseca* » p. 144.

Digitized by Google

comme M_1Q est la normale principale de (M_1) et l'axe central de (M). Les deux autres côtés du carré enveloppent deux cycloïdes tordues en hélice sur le cylindre, qui a pour section droite l'épicycloïde (Q). Si l'on rabattait tous les carrés dans le plan des épicycloïdes, les courbes (M) et (M_1) s'y trouveraient transformées en deux épicycloïdes semblables à (P) et à (Q). Remarquons enfin que, dans les deux exemples qui précèdent, les courbes (M) et (M_1) sont égales entre elles, et symétriquement placées par rapport à un plan ou à une droite.

12. Pour compléter le système des formules données dans les paragraphes précédents, il nous reste à nous occuper de la détermination de la courbe (M_1) dans tous les cas considérés. Remarquons d'abord que, pour la tangente aussi bien que pour la binormale, c'est $q = q_0$ qu'on doit prendre, parce que M_1 est le point central de d. Occupons-nous, en premier lieu, du cas où d, définie en direction par les cosinus α, β, γ, est TANGENTE à (M_1). Les cosinus directeurs de cette tangente ont toujours les expressions (18), d'où il suit, en rappelant l'égalité (17),

$$\frac{ds_1}{ds} = \Sigma \alpha \dot{x} = \alpha + p\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dq_0}{ds}.$$

Dans cette formule $d\sigma$ est l'angle de contingence, qu'on sait calculer par la formule (8). On trouve ensuite, pour le rayon de flexion,

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\sigma} = p + \frac{\alpha - \dfrac{dq_0}{ds}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}}.$$

On sait enfin que les cosinus directeurs de la binormale, qui ont les expressions (15), ont leurs variations proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale principale, et, partant, à $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$. On trouve ainsi, par l'emploi de formules connues,

$$(\ddot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\gamma}\ddot{\beta})\frac{ds}{d\sigma} + \cdots = -\frac{\dot{\alpha}}{r_1}\frac{ds_1}{d\sigma}\ ;\ \text{etc.}$$

Il vient donc, en multipliant, par $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, et additionnant,

$$\frac{1}{r_1\rho_1^2} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^5 \Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\ddot{\alpha}.$$

Pour faire une application de ces formules, considérons l'axe central d'une courbe appartenant à la famille $\rho r'^2 = a(\rho^2 + r^2)$. Les coordonnées

Digitized by Google

d'une telle droite et leurs variations sont données par les formules du § 10, en y supposant $l = a$. On trouve $d\sigma = d\varphi$, et

$$\frac{ds_1}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{a}{r} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Lorsque (M) est donnée, φ est une fonction connue de s, et l'élimination de s entre les équations qui précèdent fournit les équations intrinsèques de (M_1). Dans le cas général on peut obtenir, par l'élimination de s et de φ, une seule relation caractéristique :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{d}{ds_1}\operatorname{arctg}\frac{a}{r_1} = 0.$$

Celle-ci, comme on devait s'y attendre, n'est autre que la relation (21), qui caractérise les courbes admettant pour binormales les normales principales d'une autre courbe. (*A continuer.*)

NOTES MATHÉMATIQUES.

×5. *Aire d'un quadrilatère.* 1° Soient $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ les sommets d'un quadrilatère convexe. On a, *en grandeur et en signe,*

$$A_1A_2A_3 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_3A_4A_1 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix};$$

la somme de ces aires donne

$$A_1A_2A_3A_4 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Si l'on retranche la seconde colonne de la première, on trouve

$$A_1A_2A_3A_4 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Digitized by Google

En retranchant la première ligne de la troisième, la deuxième de la quatrième, on trouve

$$A_1A_2A_3A_4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Cette formule peut se démontrer directement. En effet, si par l'origine O des coordonnées on mène OB, OC parallèles aux diagonales A_1A_3, A_2A_4, on forme un triangle OBC équivalent au quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$. Mais les coordonnées des points B, C sont

$$(x_3 - x_1, y_3 - y_1), \quad (x_4 - x_2, y_4 - y_2), \text{ etc.}$$

2° Considérons un quadrilatère concave $A_1A_2A_3A_4$, et supposons le point A_4 à l'intérieur du triangle $A_1A_2A_3$. En tenant compte de la règle des signes, on peut encore écrire

$$A_1A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 + A_3A_4A_1;$$

par suite les formules (1), (2), (3) subsistent encore.

3° Supposons maintenant un quadrilatère étoilé $A_1A_2A_3A_4$ dont les côtés A_2A_3, A_1A_4 se coupent en un point D compris entre les côtés A_1A_2, A_3A_4. Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$ sont de signes contraires. Leur différence arithmétique est égale à celle des triangles DA_1A_2, DA_3A_4; c'est cette différence qu'on appelle aire du quadrilatère étoilé et qui est représentée par les formules (1), (2), (3).

Menons la droite A_4E égale et parallèle à A_3A_1. La différence des valeurs absolues des aires $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$ est égale à l'aire d'un triangle ayant pour base A_4A_3 et pour hauteur la différence des hauteurs des triangles $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$; donc elle est encore égale à l'aire du triangle A_2A_4E, ou à l'expression (3).

4° Considérons deux quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ et soient Q, Q' leurs aires définies comme il vient d'être expliqué, de sorte que

$$2Q = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}, \quad 2Q' = \begin{vmatrix} x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 \\ x'_4 - x'_2 & y'_4 - y'_2 \end{vmatrix}.$$

Effectuons la multiplication des deux déterminants; en posant

$$\rho_{rs} = x_r x'_s + y_r y'_s, \quad \rho_{rr} = x_r x'_r + y_r y'_r,$$
$$\lambda_r = x_r^2 + y_r^2, \quad \lambda'_r = x_r'^2 + y_r'^2,$$

on trouve

$$4QQ' = \begin{vmatrix} \rho_{33} - \rho_{31} - \rho_{13} + \rho_{11} & \rho_{34} - \rho_{14} - \rho_{32} + \rho_{12} \\ \rho_{43} - \rho_{23} - \rho_{41} + \rho_{21} & \rho_{44} - \rho_{42} - \rho_{24} + \rho_{22} \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

expression qu'on peut transformer en introduisant les distances $A_r A'_s = d_{rs}$. En effet, observant que

$$d_{rs}^2 = (x_r - x'_s)^2 + (y_r - y'_s)^2 = \lambda_r + \lambda'_s - 2\rho_{rs},$$

on pourra remplacer ρ_{rs} par $\frac{1}{2}(\lambda_r + \lambda'_s - d_{rs}^2)$ et écrire

$$16QQ' = \begin{vmatrix} -d_{33}^2 + d_{31}^2 + d_{13}^2 - d_{11}^2 & -d_{34}^2 + d_{14}^2 + d_{32}^2 - d_{12}^2 \\ -d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{41}^2 - d_{21}^2 & -d_{44}^2 + d_{42}^2 + d_{24}^2 - d_{22}^2 \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait coïncider les deux quadrilatères, on obtient

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2d_{13}^2 & d_{14}^2 + d_{23}^2 - d_{34}^2 - d_{12}^2 \\ d_{14}^2 + d_{23}^2 - d_{34}^2 - d_{13}^2 & 2d_{24}^2 \end{vmatrix},$$

ou la formule connue

$$16Q^2 = 4f^2g^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2,$$

où a, b, c, d sont les côtés consécutifs d'un quadrilatère et f, g les diagonales (Comparez Dostor, NAM., 1874, p. 559). (J. N.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 785.

(Voir *Mathesis* (2), II, p. 216).

Soient H_a, H_b, H_c *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC; M_a, M_b, M_c *les points de rencontre des droites* AM, BM, CM *avec* BC, CA, AB. *Les triangles* AH_bH_c, H_aBH_c, H_aH_bC *étant inversement semblables à* ABC, *appelons* M'_a, M'_b, M'_c *respectivement l'homologue de* M_a *dans* AH_bH_c, *l'homologue de* M_b *dans* H_aBH_c, *l'homologue de* M_c *dans* H_aH_bC. *Trouver le lieu du point* M *tel que les droites* $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ *concourent en un même point* M'; *trouver aussi le lieu du point* M'. (E. Lemoine).

Solution par M. Emmerich. 1° Soient X, Y, Z les coordonnées normales du point M rapporté au triangle fondamental ABC. Les équations de H_bH_c et de AM'_a, l'isogonale de AM, étant

$$-x\cos A + y\cos B + z\cos C = 0, \quad yY - zZ = 0,$$

(*) Nous avons à mentionner une bonne solution de la question 1218 (*Mathesis*, 1899, p. 277), par M. Déprez, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée de Bruxelles. Notre zélé correspondant remarque que le cercle de Monge de la conique variable enveloppe une ellipse.

Digitized by Google

on trouve les coordonnées du point M'_a

$$Y\cos C + Z\cos B, \quad Z\cos A, \quad Y\cos A,$$

et ensuite l'équation de la droite $M_aM'_a$

$$x(Y^2 - Z^2)\cos A + (yZ - zY)(Y\cos C + Z\cos B) = 0. \qquad (1)$$

Pour simplifier l'écriture, nous écrivons A, B, C au lieu de cos A, cos B, cos C, nous divisons aussi l'équation (1) par $Y^2 Z^2$ et remplaçons $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$ par α, β, γ, ce qui revient à introduire l'inverse triangulaire M'' de M, situé à l'intersection des droites AM'_a, BM'_b, CM'_c. Il vient

$$A(\gamma^2 - \beta^2)x + (B\beta + C\gamma)(\beta y - \gamma z) = 0. \qquad (2)$$

On en conclut la condition pour que les droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ concourent en un même point :

$$\begin{vmatrix} A(\gamma^2 - \beta^2) & \beta(B\beta + C\gamma) & -\gamma(B\beta + C\gamma) \\ -\alpha(C\gamma + A\alpha) & B(\alpha^2 - \gamma^2) & \gamma(C\gamma + A\alpha) \\ \alpha(A\alpha + B\beta) & -\beta(A\alpha + B\beta) & C(\beta^2 - \alpha^2) \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on trouve

$$\begin{matrix} ABC(\gamma^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2) \\ + \Sigma C\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)(B\beta + C\gamma)(A\alpha + C\gamma) = 0. \end{matrix} \qquad (3)$$

Mais $(\gamma^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2) = \Sigma\alpha^2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)$,

$$(B\beta + C\gamma)(A\alpha + C\gamma) = AB\alpha\beta + C\gamma\Sigma A\alpha,$$

de sorte que le second terme de l'équation (3) prend la forme

$$ABC\Sigma\alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta\gamma\Sigma C^2(\beta^2 - \alpha^2)\Sigma A\alpha,$$

et l'équation se réduit à

$$\alpha\beta\gamma\Sigma C^2(\beta^2 - \alpha^2)\Sigma A\alpha = 0.$$

Ecartons la solution $\alpha\beta\gamma = 0$; il reste pour le lieu de M'' une droite,

$$\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0, \qquad (4)$$

et une conique,

$$(\cos^2 B - \cos^2 C)\alpha^2 + (\cos^2 C - \cos^2 A)\beta^2 + (\cos^2 A - \cos^2 B)\gamma^2 = 0. \qquad (5)$$

La droite (4) est l'axe orthique du triangle ABC (axe d'homologie de ABC, $H_aH_bH_c$); sa transformée par inversion triangulaire est une conique circonscrite à ABC, coupant la circonférence ABC au point

Digitized by Google

cosec (B — C), cosec (C — A), cosec (A — B) et ayant pour centre le point de Lemoine de ABC.

La conique (5) est autopolaire à ABC et a pour centre le point cosec (B — C), cosec (C — A), cosec (A — B). Elle a pour transformée une quartique passant par A, B, C, l'orthocentre H, le centre I du cercle inscrit, le barycentre G. Si un point (X, Y, Z) fait partie de cette quartique, ses associés (— X, Y, Z), (X, — Y, Z), (X, Y, — Z) appartiennent également à la courbe. Ces circonstances s'expliquent facilement à priori.

2° Passons au lieu du point M'. Si l'on suppose le point M'' mobile sur l'axe orthique (4), les équations de $M_aM'_a$, $M_bM'_b$ se réduisent à

$$(\gamma^2 - \beta^2)\,x - \alpha\beta y + \alpha\gamma z = 0,$$
$$\alpha\beta x + (\alpha^2 - \gamma^2)\,y - \beta\gamma z = 0.$$

On tire de là, pour les coordonnées de M,

$$\rho x = \alpha(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2),\quad \rho y = \beta(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2),\quad \rho r = \gamma(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2),\quad (6)$$

ρ étant un facteur de proportionnalité; à ces *formules paramétriques*, il faut joindre l'équation de condition

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

La partie du lieu qui correspond au point M'' mobile sur la courbe (5) donne des calculs assez compliqués.

Note. Si l'on ordonne l'équation (1) par rapport à X, Y, Z, on trouve

$$(Cz - Ax)\,Y^2 - (Cy - Bz)\,YZ + (Ax - By)\,Z^2 = 0.$$

Donc si l'on pose

$$A_{11} = By - Cz,\quad A_{22} = Cz - Ax,\quad A_{33} = Ax - By,$$
$$A_{23} = Cy - Bz,\quad A_{31} = Az - Cx,\quad A_{12} = Bx - Ay,$$

les équations des droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} A_{22}Y^2 - A_{23}YZ + A_{33}Z^2 &= 0,\\ A_{33}Z^2 - A_{31}ZX + A_{11}X^2 &= 0,\\ A_{11}X^2 - A_{12}XY + A_{22}Y^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Pour avoir le lieu du point M', il faut éliminer X, Y, Z entre les relations (7). Si l'on considère x, y, z comme des quantités connues et X, Y, Z comme les variables, ces équations représentent trois couples de droites (p, p'), (q, q'), (r, r') passant respectivement par A, B, C.

Digitized by Google

Trois de ces droites, par exemple p, q, r doivent passer par un même point M, et comme le produit des couples de valeurs des rapports $\frac{Y}{Z}, \frac{Z}{X}, \frac{X}{Y}$ qui correspondent aux trois couples de droites est égal à l'unité, les trois autres droites p', q', r' concourent en un second point M_1. Or, les conjuguées harmoniques des droites p, p'. q, q', r, r' respectivement par rapport aux angles A, B, C du triangle ABC rencontrent les côtés opposés sur les polaires trilinéaires des points M, M_1; mais ces conjuguées sont représentées par les équations (7) où l'on change les signes des termes en YZ, ZX, XY et leurs points de rencontre avec BC, CA, AB sont sur la conique

$$\Sigma A_{11} X^2 + \Sigma A_{23} YZ = 0. \qquad (8)$$

Cette conique étant composée des polaires des points M, M_1, le discriminant de (8) est nul; l'équation du lieu de M' est donc

$$\begin{vmatrix} 2A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 2A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 2A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$4\,(Ax - By)\,(By - Cz)\,(Cz - Az)$$
$$+ (Bx - Ay)\,(Cy - Bz)\,(Az - Cx) - \Sigma\,(By - Cz)\,(Cy - Bz)^2 = 0.$$

En développant on trouve

$$\Sigma A\,(C^2 - B^2)\,x^3 + \Sigma\,(C^2 - A^2 - 2B^2)\,(Ax - Cz)\,y^2 = 0. \qquad (9)$$

Ce calcul donne pour le lieu du point M' une cubique.

Le lieu de M'' étant composé d'une droite et d'une conique, on est conduit à conjecturer la même chose pour le lieu M'. Cependant l'équation (8) nous paraît irréductible.

Nous publions donc les développements de M. Emmerich et les nôtres avec l'espoir qu'un lecteur plus heureux parvienne à les compléter et à dissiper certaines obscurités ou contradictions.

On peut généraliser la question en ces termes :

Étant donnés deux triangles ABC, A'B'C', on partage les côtés BC, B'C' aux points M_a, M'_a dans un même rapport, les côtés CA, C'A' aux points M_b, M'_b dans un même rapport, enfin les côtés AB, A'B' aux points M_c, M' dans un même rapport. Ces rapports étant choisis de

Digitized by Google

manière que les triples de droites (AM_a, BM_b, CM_c), ($A'M'_a$, BM'_b, CM'_c), ($M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$) concourent en des points M, M', M_1, on demande les lieux des points M, M', M_1.

On peut encore supposer que (M_a, M'_a), (M_b, M'_b), (M_c, M'_c) soient des éléments correspondants des couples de ponctuelles projectives marquées sur BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B'.

Pour terminer, nous remarquerons que les formules (6) étant mises sous la forme

$$x = \sigma\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad y = \sigma\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}, \quad z = \sigma\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta},$$

on est conduit à regarder α, β, γ comme les côtés d'un triangle et à écrire

$$x = \sigma\cos\lambda, \quad y = \sigma\cos\mu, \quad z = \sigma\cos\nu,$$

λ, μ, ν étant les angles de ce triangle, qui d'ailleurs, doit vérifier constamment la relation

$$A\sin\lambda + B\sin\mu + C\sin\nu = 0.$$

Cependant, cette observation, assez curieuse, ne donne pas de résultat simple. (J. N.).

×Question 1217.

(Voir *Mathesis*, (2) t. IX, p. 104).

Calculer la surface d'un triangle sphérique ABC, *connaissant le côté* BC = a, *la médiane* AM = α *et la hauteur* AD = h. (Klompers).

Solution par M. J. Déprez. On a la relation :

$$\operatorname{cotg} E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\sin a\sin h}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{1}{2}a+2\cos\frac{1}{2}a\cos\alpha}{\sin a\,.\,\sin h} = \frac{\cos\frac{1}{2}a+\cos\alpha}{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin h}.$$

On a donc :

$$\operatorname{cotg} E = \frac{\cos\frac{1}{2}a+\cos\alpha}{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin h}.$$

Note. Ont résolu la même question MM. Emmerich, Soons et Rose.

Digitized by Google

×Question 1219.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 128).

Éliminer x, y, z entre les équations

$$bx^2 + axy + cyz = 0, \quad cy^2 + byz + azx = 0, \quad az^2 + czx + bxy = 0.$$

(Emmerich).

Solution par M. A. Goldenberg. En divisant respectivement par xy, yz, zx les deux membres de chacune des équations données et posant

$$x = \lambda y, \quad y = \mu z, \quad z = \nu x,$$

on obtient facilement

$$2ab \cdot \lambda = -a^2 - b^2 + c^2, \quad 2bc \cdot \mu = a^2 - b^2 - c^2,$$
$$2ca \cdot \nu = -a^2 + b^2 - c^2;$$

observant que $\lambda\mu\nu = 1$, on a

$$8a^2b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 - b^2 + c^2).$$

Autres solutions par MM. Brocard et Déprez.

×Question 1237.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 216).

Soient E, F *les points de concours des côtes opposés* AB *et* CD, BC *et* DA *d'un quadrilatère convexe* ABCD; G *étant le point d'intersection des diagonales* AC *et* BD, *on mène la droite* EG *qui coupe* BC *en* X, DA *en* Z; *on mène aussi la droite* FG *qui rencontre* AB *en* Y, DC *en* U.

En désignant par Q, Q′ *les aires des quadrilatères* ABCD, XYZU, *et par* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *celles des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC, *on a la formule*

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{8\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta)}.$$

(J. Neuberg.)

Solution par M. Emmerich. On a

$$\frac{AY}{BY} = \frac{AE}{BE} = \frac{\text{tr.ACD}}{\text{tr.BCD}} = \frac{\beta}{\alpha}; \quad \text{d'où} \quad \frac{AY}{AB} = \frac{\beta}{\alpha+\beta};$$

$$\frac{AZ}{DZ} = \frac{AF}{DF} = \frac{\text{tr.ABC}}{\text{tr.DBC}} = \frac{\delta}{\alpha}; \quad \text{d'où} \quad \frac{AZ}{AD} = \frac{\delta}{\alpha+\delta}.$$

Digitized by Google

En multipliant, on trouve,

$$\frac{AY \,.\, AZ}{AB \,.\, AD} = \frac{\beta\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)} = \frac{tr.AYZ}{tr.ABD} = \frac{tr.AYZ}{\gamma};$$

on arrive ainsi et par des procédés analogues au tableau suivant :

$$tr.AYZ = \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)}, \quad tr.BYX = \frac{\gamma\delta\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)},$$

$$tr.CXU = \frac{\delta\alpha\beta}{(\gamma+\delta)(\gamma+\beta)}, \quad tr.DUZ = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\delta+\alpha)(\delta+\gamma)}.$$

Pour calculer $Q - Q'$ observons que $\alpha+\gamma = \beta+\delta = Q$ et posons $\alpha\gamma - \beta\delta = \varepsilon$, $\alpha\gamma + \beta\delta = \eta$,

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta) = N.$$

Il vient

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\delta) = 2\alpha Q - \varepsilon, \quad (\beta+\gamma)(\beta+\alpha) = 2\beta Q + \varepsilon,$$
$$(\gamma+\delta)(\gamma+\beta) = 2\gamma Q - \varepsilon, \quad (\delta+\alpha)(\delta+\gamma) = 2\delta Q + \varepsilon.$$

$$tr.AYZ + tr.CXU = \frac{\beta\gamma\delta}{2\alpha Q - \varepsilon} + \frac{\delta\alpha\beta}{2\gamma Q - \varepsilon} =$$
$$\frac{\beta\delta Q(2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \varepsilon)}{N} = \frac{\beta\delta Q(2Q^2 - \varepsilon - 4\alpha\gamma)}{N};$$

$$tr.BYX + tr.DUZ = \frac{\gamma\delta\alpha}{2\beta Q + \varepsilon} + \frac{\alpha\beta\gamma}{2\delta Q + \varepsilon} =$$
$$\frac{\alpha\gamma Q(2\delta^2 + 2\beta^2 + \varepsilon)}{N} = \frac{\alpha\gamma Q(2Q^2 + \varepsilon - 4\beta\delta)}{N};$$

$$Q - Q' = \frac{2\eta Q^2 + \varepsilon^2 Q - 8\alpha\beta\gamma\delta Q}{N}.$$

$$N = (2\alpha Q - \varepsilon)(2\gamma Q - \varepsilon) = 4\alpha\gamma Q^2 - 2\varepsilon Q^2 + \varepsilon^2$$
$$= 4\alpha\gamma Q^2 - 2(\alpha\gamma - \beta\delta)Q^2 + \varepsilon^2 = 2\eta Q^2 + \varepsilon^2.$$

On aura donc

$$Q - Q' = \frac{(N - 8\alpha\beta\gamma\delta)Q}{N},$$

ce qui équivaut à la proposition.

Autre solution. On peut arriver à la formule proposée et même à une formule plus générale par des calculs plus simples.

α, β, γ, δ désignant toujours les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, soient a, b, c, d quatre forces parallèles appliquées en A, B, C, D et prenons pour X, Y, Z, U les points d'application des résultantes des

Digitized by Google

forces appliquées aux extrémités des côtés CB, BA, AD, DC, de sorte que

$$\frac{BX}{XC}=\frac{c}{b},\quad \frac{BY}{YA}=\frac{a}{b},\quad \frac{AZ}{ZD}=\frac{d}{a},\quad \frac{DU}{UC}=\frac{c}{d}.$$

Cherchons d'abord la surface du triangle XYZ. Si a_1, y, b_1, désignent les perpendiculaires abaissées des points A, Y, B sur XZ, une formule connue donne

$$y=\frac{a_1a+b_1b}{a+b};$$

en y multipliant y, a_1, b_1 par XZ, on trouve

$$XYZ=\frac{AZX\,.\,a+BZX\,.\,b}{a+b}. \qquad (1)$$

Mais

$$\frac{AZX}{ADX}=\frac{d}{a+d},\quad \frac{BZX}{BZC}=\frac{c}{b+c};$$

tirant de là AZX et BZX pour substituer les valeurs dans la formule (1), on obtient

$$(a+b)\,.\,XYZ=ADX\frac{ad}{a+d}+BZC\frac{bc}{b+c}. \qquad (2)$$

Les aires ADX, BZC résultent des égalités

$$ADX=\frac{\beta c+\gamma b}{b+c},\quad BZC=\frac{\delta a+\alpha d}{a+d},$$

analogues à la relation (1). Par suite, l'égalité (2) peut prendre la forme

$$(a+b).XYZ=\frac{adc.\beta+adb.\gamma+abc.\delta+bcd.\alpha}{(a+d)\,(b+c)}. \qquad (3)$$

Par analogie,

$$(c+d).XUZ=\frac{adc.\beta+adb.\gamma+abc.\delta+bcd.\alpha}{(a+d)\,(b+c)}. \qquad (4)$$

On en conclut

$$Q'=\frac{\Sigma abc\,.\,\delta\times\Sigma a}{(a+d)\,(b+c)\,(a+b)\,(c+d)}.$$

Dans la question 1237, a, b, c, d sont égaux à α, β, γ, δ; donc $\Sigma a=2Q$, $\Sigma abc\,.\,\delta=4\alpha\beta\gamma\delta$, etc.

Digitized by Google

La relation

$$(a+b).XYZ = (c+d).XUZ$$

se déduit immédiatement de ce que le centre des forces parallèles a, b, c, d, étant au point d'intersection G des droites XZ, YU, on a

$$\frac{XYZ}{XUZ} = \frac{YG}{GU} = \frac{c+d}{a+b}.$$

(J. N.).

Question 1245.

(Voir *Mathesis* (2), t. IX, p. 264).

Soient PP′, QQ′ *deux cordes rectangulaires d'une parabole, passant par son foyer* F, *et qui rencontrent la directrice respectivement en* A *et* B. *Soient* N *le point de rencontre des normales en* P *et* P′ *et* N′ *le point de rencontre des normales en* Q *et* Q′; δ *et* δ_1 *les distances de* N *à* PP′ *et* QQ′, *et* δ' *et* δ'_1 *les distances de* N′ *à* PP′ *et* QQ′. *On a les relations*

$$\delta\delta' = 2.\overline{FA}^2, \quad \delta_1\delta'_1 = 2.\overline{FB}^2.$$

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Emmerich. Soient R, R_1, R′, R'_1 les pieds de δ, δ_1, δ', δ'_1. Les triangles PP′B et P′PN étant égaux, on a FB = δ et RP = FP′; de même, on conclut des triangles égaux QQ′A et Q′QN′ que δ'_1 = FA et R'_1Q = FQ′. Joignons B au milieu Z de PP′ et FR. L'angle ABZ étant droit, on voit que $\overline{FB}^2$ = FZ. FA, c'est-à-dire $\delta^2 = \frac{1}{2}\delta_1\delta'_1$.

Y étant le milieu de QQ′, on a de même $\overline{FA}^2$ = FY. FB ou $\delta'^2_1 = \frac{1}{2}\delta'\delta$. On a aussi $\delta\delta'_1 = \frac{1}{4}\delta_1\delta'$ et $\delta^5 : \delta'^5_1 = \delta_1 : \delta'$.

L'énoncé de cette question a été rectifié.

Solution analytique par M. Jules Cardoso-Laynes (Livourne). En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires le foyer et pour axe des x l'axe de la parabole, on a pour cette courbe

$$y^2 - 2px - p^2 = 0 \tag{1}$$

et pour les droites PP′ et QQ′

$$mx - y = 0; \quad x + my = 0. \tag{2}$$

Les coordonnées des points P, P′ sont

$$\left[\frac{p}{m^2}(1 \pm \sqrt{1+m^2}); \quad \frac{p}{m}(1 \pm \sqrt{1+m^2})\right]$$

Digitized by Google

les normales en P, P′ ont donc pour équation

$$(3)\qquad y-\frac{p}{m}(1\pm\sqrt{1+m^2})$$

$$+\frac{1}{m}(1\pm\sqrt{1+m^2})\left(x-\frac{p}{m^2}(1+\sqrt{1+m^2})\right)=0.$$

Résolvons les équations que l'on obtient en additionnant et soustrayant les deux équations (3); nous aurons pour les coordonnées de N

$$x=\frac{p(m^2+2)}{m^2},\quad y=\frac{p}{m}.$$

De là, on déduit

$$\delta=\frac{p\sqrt{1+m^2}}{m};\quad \delta_1=\frac{2p\sqrt{1+m^2}}{m^2};$$

puis, en remplaçant m par $-\frac{1}{m}$,

$$\delta'_1=p\sqrt{1+m^2};\quad \delta'=2pm\sqrt{1+m^2}.$$

Mais

$$FA=p^2(1+m^2),\quad FB=\frac{p^2(1+m^2)}{m^2};$$

par conséquent,

$$\delta\delta'=2FA^2;\quad \delta_1\delta'_1=2\overline{FB}^2.$$

M. Rose a résolu la même question.

QUESTIONS D'EXAMEN.

926. Construire un trapèze, connaissant l'une des bases, les deux diagonales et leur angle.

927. On donne trois points en ligne droite O, A, B. Mener par O une droite OT qui coupe les perpendiculaires élevées en A et B sur OB en des points A′, B′ tels que les lignes AB′ et A′B soient perpendiculaires.

On a : AA′. BB′ $=\overline{AB}^2$, AA′ : BB′ $=$ OA : OB; d'où AA′ et BB′.

928. On donne trois parallèles AA′, BB′, CC′ et une sécante u qui les coupe en A, B, C. Soient M, N deux points fixes pris sur u. On mène par M et N deux droites parallèles à une direction quelconque; elles rencontrent CC′, BB′ en M′, N′. Après avoir construit les parallélogrammes ACM′m, CBN′n, on trace les droites Mm, Nn qui se coupent en R. Démontrer que le point R décrit une droite.

Digitized by Google

929. Sur la hauteur AH d'un triangle ABC rectangle en A, on porte la longueur AD = AB, et sur l'hypoténuse CB la longueur CE = CA. Démontrer que la droite DE est parallèle à AC.

930. On donne un cercle O et une corde AB. Trouver un rayon OC de ce cercle, tel que le cercle décrit sur OC comme diamètre touche la droite AB.

Le milieu de OC se trouve sur la circonférence $(O, \frac{1}{2}R)$ et sur la parallèle menée à AB à la distance $\frac{1}{2}R$.

931. Démontrer les identités suivantes relatives à un triangle rectiligne quelconque ABC :

$$\Sigma \cos^2\frac{1}{2}A = \frac{4R+r}{2R},\quad \Sigma \sin^2\frac{1}{2}A = \frac{2R-r}{2R};$$

$$\Sigma a \sin^2\frac{1}{2}A = p - \frac{T}{R},\quad \Sigma a \cos^2\frac{1}{2}A = p + \frac{T}{R};$$

$$\Sigma a^2 b \cos^2\frac{1}{2}C = \Sigma ab^2 \cos^2\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}p\Sigma a^2;$$

$$\Sigma (b+c)\cos^2\frac{1}{2}A = 3p,\quad \Sigma (b+c)\sin^2\frac{1}{2}A = p;$$

$$\Sigma (b-c)\cos^2\frac{1}{2}A = -\Sigma (b-c)\sin^2\frac{1}{2}A = \frac{p(a-b)(b-c)(c-a)}{abc};$$

$$\Sigma \frac{b+c}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{p}{abc}\Sigma a^2;\quad \Sigma \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = 0;$$

$$\Sigma (a-b)\sin A \sin B = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{4R^2};$$

$$\Sigma \frac{a+2b}{bc}\operatorname{coséc}^2\frac{1}{2}A = \Sigma \frac{a+2c}{bc}\operatorname{coséc}^2\frac{1}{2}A = \frac{2p^2}{T^2};$$

$$\Sigma \frac{a+2b}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = \Sigma \frac{a+2c}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{2p^2}{abc};$$

$$\Sigma a \cos^2\frac{1}{2}B \cos^2\frac{1}{2}C = p + \frac{T}{4R};$$

$$\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}(A-B)\cot\frac{1}{2}(A-C) = \frac{r}{p}.$$

(Extrait du *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno III, déc. 1899).

Digitized by Google

932. Construire un triangle ABC connaissant les points M, N, P où la médiane, la bissectrice et la hauteur partant d'un même sommet, coupent la circonférence circonscrite.

Les points M, N, P déterminent la circonférence circonscrite. La hauteur AP est parallèle au rayon ON; AM coupe OM au milieu du côté BC, etc.

933. Si un triangle ABC satisfait à la condition

$$3b = a + c,$$

on a

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{B}{2}, \quad \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 2,$$

$$3(1 + \cos A \cos C) = 5(\cos A + \cos C),$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}, \quad r_b = 2r, \quad l_b^2 = \frac{8}{9}ac;$$

r, r_a, r_b, r_c désignent les rayons des cercles tritangents, et l_b la bissectrice de l'angle B. (G. DE LONGCHAMPS.)

934. Soient $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ les côtés d'un quadrilatère inscriptible, et soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les perpendiculaires abaissées d'un point intérieur sur ces côtés. On a la relation

$$a\gamma + c\alpha = b\delta + d\beta.$$

Soit E le point de rencontre des côtés b, d et supposons que CD passe entre AB et E. On a :

$$a\alpha + BE \cdot \beta + EA \cdot \delta = ABE,$$
$$-c\gamma + EC \cdot \beta + ED \cdot \delta = CDE,$$

d'où, par division,

$$\frac{a\alpha + BE \cdot \beta + EA \cdot \delta}{-c\gamma + EC \cdot \beta + ED \cdot \delta} = \frac{AE \cdot BE}{DE \cdot CE};$$

chassant les dénominateurs et calculant BE, AE, DE, CE en fonction de a, b, c, d, on trouve la relation proposée.

Lorsqu'on sait que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont liées par une équation de la forme

$$M\alpha + N\gamma = P\beta + Q\delta,$$

on peut déterminer M, N, P, Q en plaçant le point O successivement en A, B, C.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

1857. Si l, m, n sont les projections des trois côtés d'un triangle sur une même direction, quelle doit être cette direction pour que $l^2 + m^2 + n^2$ soit maximum ou minimum? (E. LEMOINE).

***1858.** Dans un triangle isoscèle ABC de base BC, représentons par h la hauteur issue du sommet A et par H les hauteurs égales issues de B et C. Suivant que l'angle A est supérieur ou inférieur à un droit, H^2 est supérieur ou inférieur à $2h^2$. (DROZ-FARNY.)

1859. On donne une circonférence C^2, dont le centre est C, et un de ses points P. Soit M un point mobile sur C^2. Si nous appelons r la parallèle conduite par M au diamètre qui passe par P, s la parallèle conduite par le même point à la tangente en P, d le diamètre passant par M, t la tangente en M à C^2 et t' la parallèle conduite par C à t; en considérant les intersections des droites r, s, d, t, t' avec la circonférence γ^2 qui a pour centre M et pour rayon MP, démontrer que :

1° le lieu des intersections de r et γ^2 est un *trifolium rectum*.

2° le lieu des intersections de s et γ^2 est un *folium double*.

3° les lieux des intersections de γ^2 avec d, t ou t' sont des *sextiques tricirculaires*. Etudier leurs formes et indiquer leurs points multiples.

CARDOSO-LAYNES.

1860. Étant donnée la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène l'ordonnée MP d'un point quelconque de la courbe. Du pied P comme centre avec le rayon a on décrit une circonférence. On sait que la tangente en M à la chaînette touche cette circonférence. Quelle est l'enveloppe de la seconde tangente menée de M à la circonférence?

(H. BROCARD.)

Plus généralement, en chaque point M d'une courbe donnée Σ on mène la symétrique t' de la tangente t à Σ par rapport à l'ordonnée de M; cette droite enveloppe une nouvelle courbe Σ'. Comment construit-on le point de contact de t' avec Σ'?

(J. N.).

Digitized by Google

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. E. CESÀRO (*Suite*, v. pp. 5, 37).

13. Passons au cas où d est la BINORMALE d'une courbe (M_1), qu'il s'agit de déterminer. Il suffit de remarquer que ds_1 est la distance entre d et d', pour avoir immédiatement, en vertu de la formule rappelée au commencement du § 2,

$$\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}},$$

où le signe a été choisi de manière que, lorsque (M_1) coïncide avec (M), on ait $ds_1 = ds$. En d'autres termes, $ds_1 = -p_1 d\sigma$; puis

$$r_1 = -p_1 = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}.$$

Pour calculer la flexion, nous rappellerons que les cosinus (18), qui définissent la direction de la tangente à (M_1), ont leurs variations proportionnelles aux variations des cosinus correspondants de la binormale :

$$\frac{\dot a}{\dot\alpha} = \frac{\dot b}{\dot\beta} = \frac{\dot c}{\dot\gamma} = \frac{r_1}{\rho_1}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{ds}{d\sigma}\frac{ds}{ds_1}\Sigma\,\dot\alpha\dot a = \frac{ds}{d\sigma}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\Sigma\,\dot\alpha\ddot x.$$

On parvient ainsi à la formule

$$\frac{r_1^2}{\rho_1} = -\frac{\dddot\alpha x + \ddot\beta y + \dddot\gamma z}{(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle il faut encore remplacer $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ par leurs valeurs (18).

14. Appliquons les formules qui précèdent au cas où d est une normale quelconque de (M), faisant l'angle ψ avec la normale principale; et cherchons comment doit varier ψ afin que d soit constamment la binormale d'une courbe (M_1). A cause de $\alpha = 0$, $p = 0$, on voit que, pour

Digitized by Google

satisfaire à la condition (9), il faut que q ait une valeur constante : soit $q = q_0 = -a$. Donc M_1 appartient, quel que soit ψ, à une circonférence, de centre M et de rayon a, tracée dans le plan normal de (M). Or on sait que cette circonférence est la caractéristique d'une sphère de rayon a, dont le centre se déplace sur (M), de sorte que MM_1, *binormale* de (M_1), est *normale* à l'enveloppe de la sphère. Donc (M_1) est une ligne asymptotique de cette enveloppe. La question que nous allons traiter ne diffère donc pas de la *détermination des lignes asymptotiques d'une surface-canal*. Les formules (8) et (13) donnent d'abord

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\frac{\sin^2\psi}{\rho^2} + \left(\frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}, \quad q_0 \frac{d\sigma^2}{ds^2} = -\frac{\cos\psi}{\rho};$$

puis la condition $q_0 = -a$ devient

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r} \pm \sqrt{\frac{\cos\psi}{a\rho} - \frac{\cos^2\psi}{\rho^2}}.$$

On déduit de là ψ en fonction de s lorsque (M) est connue. On calcule ensuite l'arc et la torsion de (M_1) au moyen des formules

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm\sqrt{1 - \frac{a}{\rho}\cos\psi}, \quad r_1 = \pm\sqrt{a\left(\frac{\rho}{\cos\psi} - a\right)}.$$

Le dernier résultat nous permet aussi de calculer, en nous servant du théorème d'Enneper, la courbure totale de la surface en un point quelconque M_1, et de voir que les centres principaux de courbure sont M et le point de rencontre de MM_1 avec la droite polaire de (M). On en déduit que les asymptotiques réelles occupent, sur la surface, la région comprise entre la surface polaire et le lieu des binormales de (M). On calcule enfin la flexion par la formule

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\frac{\rho}{r}\sin\psi + \frac{d\rho}{ds}\cos\psi}{2(\rho - a\cos\psi)}\sqrt{\frac{a}{\rho\cos\psi}} \mp \frac{3}{2}\frac{\sin\psi}{\sqrt{\rho(\rho - a\cos\psi)}}.$$

15. Il nous reste à examiner le cas de la NORMALE PRINCIPALE. Pour calculer l'arc de (M_1) il nous faudra élever au carré les égalités (12), et les additionner. Il est d'abord utile de remarquer qu'en élevant au carré les déterminants (13) on obtient

$$\Sigma\xi^2 = p^2 + p_0^2, \quad \Sigma\dot{\xi}^2 = (p_0^2 + p_1^2 + q_0^2)\frac{d\sigma^2}{ds^2},$$

Digitized by Google

après avoir adopté les notations du § 8. On en déduit

$$\Sigma(\beta\dot{\xi} - \gamma\dot{\eta})^2 = (p_1^2 + q_1^2)\frac{d\sigma^2}{ds^2}, \quad \Sigma(\beta\dot{\zeta} - \dot{\gamma}\eta)^2 = p^2\frac{d\sigma^2}{ds^2}.$$

En outre,

$$\Sigma(\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta})(\beta\dot{\zeta} - \dot{\gamma}\eta) = \Sigma\alpha\dot{\alpha}.\Sigma\xi\dot{\xi} - \Sigma\alpha\xi.\Sigma\alpha\dot{\xi} = 0.$$

Cela posé, si l'on opère sur les égalités (12) comme nous l'avons dit en commençant, on trouve

$$\frac{ds_1}{d\sigma} = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}.$$

On a aussi, en vertu des mêmes formules,

$$\Sigma\dot{\alpha}\dot{x} = -q_1\frac{d\sigma^2}{ds^2}, \quad \Sigma\dot{\alpha}(\gamma\dot{y} - \beta\dot{z}) = p_1\frac{d\sigma^2}{ds^2}.$$

D'autre part, les formules de Frenet,

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{x}}{\rho_1} + \frac{\gamma\dot{y} - \beta\dot{z}}{r_1}, \qquad \text{etc.},$$

multipliées par $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, et additionnées, nous donnent la première des relations

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\Sigma\dot{\alpha}\dot{x}}{\Sigma\dot{x}^2} = q_1\frac{d\sigma^2}{ds_1^2}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{\Sigma\dot{\alpha}(\gamma\dot{y} - \beta\dot{z})}{\Sigma\dot{x}^2} = p_1\frac{d\sigma^2}{ds_1^2}.$$

On obtient la seconde d'une manière analogue, mais en multipliant par $\gamma\dot{y} - \beta\dot{z}$, etc. Donc

$$\rho_1 = q_1 + \frac{p_1^2}{q_1}, \quad r_1 = p_1 + \frac{q_1^2}{p_1}.$$

Ces formules sont très-connues; nous aurions pu les écrire immédiatement en observant que p_1 représente le paramètre de distribution des plans tangents de la surface des normales principales de (M_1), et q_1 la distance de M_1 au point central de la normale principale; et en nous rappelant que

$$p_1 = \frac{\rho_1^2 r_1}{\rho_1^2 + r_1^2}, \quad q_1 = \frac{\rho_1 r_1^2}{\rho_1^2 + r_1^2}.$$

Lorsqu'on applique ces formules aux courbes (M), considérées dans le § 10, on vérifie sans peine que les conditions (22) sont également remplies par

Digitized by Google

les courbes (M_1), après avoir reconnu que ψ n'est autre, au signe près, que l'angle φ, relatif à ces dernières courbes.

16. Quoique les formules établies dans les paragraphes précédents semblent se rapporter à des questions très-spéciales, elles peuvent être utilisées dans une foule d'autres questions de la théorie des courbes et des surfaces. Proposons-nous, par exemple, de ***déterminer les géodésiques d'un hélicoïde à plan directeur***. Ayant pris comme courbe fondamentale une de ces géodésiques, l'observation finale du § 8 nous apprend que les coordonnées

$$\alpha = \cos\psi, \quad \beta = \sin\psi, \quad \gamma = 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

de la génératrice d doivent satisfaire à la condition (20) quel que soit q. Il faut donc que l'on ait

$$\Sigma(\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta})\ddot{\xi} = 0, \quad \Sigma(\dot{\alpha}\ddot{\xi} - \ddot{\alpha}\dot{\xi}) = 0, \quad \Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\ddot{\alpha} = 0. \quad (23)$$

La première condition devient

$$\operatorname{tg} 2\psi = -\frac{r}{\rho},$$

ou bien $\psi = \frac{1}{2}\varphi$: elle nous dit que la tangente à (M) et sa conjuguée (génératrice de la surface rectifiante) sont symétriques par rapport à d. Cela devait être; car, toute trajectoire *orthogonale* des génératrices étant une ligne asymptotique, l'indicatrice de Dupin (dont d est une asymptote) est une hyperbole équilatère. Si l'on tient compte du résultat qui précède, la deuxième condition devient

$$l d\varphi + \sin\varphi \cdot dl = 0,$$

d'où $l = a\cot\frac{\varphi}{2}$, ou bien, en remplaçant l et φ par leurs expressions en r et ρ,

$$\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right).$$

Ainsi ***les courbures de toute géodésique de l'hélicoïde sont liées entre elles par une relation du quatrième degré.*** Enfin la troisième condition, si l'on y remplace φ en fonction de l, donne successivement

$$\frac{d^2l}{ds^2} = \frac{4a^2l}{(a^2 + l^2)^2}, \quad \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 + \frac{4a^2}{a^2 + l^2} = \textit{constante}.$$

Une nouvelle intégration permet de calculer l (et par suite φ, puis ρ et r) en fonction de s; et l'on parvient ainsi aux équations intrinsèques des courbes cherchées.

Digitized by Google

17. La *détermination des lignes de courbure de l'hélicoïde* est tout aussi facile. Par rapport au trièdre fondamental d'une telle courbe, les coordonnées de la génératrice d sont

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}}, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

où $rd\psi = ds$, puisque la projection de d sur le plan normal doit engendrer une surface développable (circonscrite à la surface). On retrouve, d'ailleurs, l'égalité précédente en appliquant la première des conditions (23). Les deux autres conditions donnent

$$\frac{d}{ds}\frac{\sin\psi}{\rho} = \frac{\sin 2\psi}{\rho^2}, \quad (1+\cos^2\psi)\frac{\sin\psi}{2\rho} = \frac{1}{r}.$$

On trouve ensuite, par une combinaison convenable de ces deux égalités,

$$\rho d\frac{\sin\psi}{\rho} = \frac{4\cos\psi}{1+\cos^2\psi}d\psi;$$

puis, en intégrant,

$$\log\frac{\sin\psi}{\rho} = \int\frac{4\,d\sin\psi}{(1+\cos^2\psi)\sin\psi} = \log\frac{\sin^2\psi}{1+\cos^2\psi} + \textit{constante}.$$

Donc

$$\rho = a\frac{1+\cos^2\psi}{2\sin\psi}, \quad r = \frac{a}{\sin^2\psi}.$$

Il suffirait d'éliminer ψ entre ces égalités pour s'apercevoir que, pour ces lignes aussi, *il y a une relation du quatrième degré entre les courbures*. Enfin, si l'on remplace ψ par sa valeur en fonction de s, qui résulte de la relation

$$s = \int rd\psi = -a\cot\psi,$$

on trouve que *les équations intrinsèques des lignes de courbure de l'hélicoïde sont*

$$\rho = \frac{a^2+2s^2}{2\sqrt{a^2+s^2}}, \quad r = a + \frac{s^2}{a}.$$

Dans ces équations, la constante a représente le double du paramètre de distribution des plans tangents à l'hélicoïde : c'est ce qu'on vérifie aisément au moyen de la formule

$$p_1 = \frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\xi}{\dot\alpha^2+\dot\beta^2+\dot\gamma^2} = \frac{\rho\sin\psi}{1+\cos^2\psi} = \frac{1}{2}a.$$

Digitized by Google

18. Nous allons faire une dernière application des formules (1) en cherchant les *courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire* (*). Les coordonnées α, β, ..., ξ de l'axe d doivent satisfaire aux relations (1) lorsqu'on y fait $\dot{\alpha}=0$, $\dot{\beta}=0$, ..., $\dot{\zeta}=0$, de sorte qu'on sait exprimer leurs dérivées en fonction des coordonnées elles-mêmes et des courbures de la ligne inconnue (M). La droite d et la tangente à (M) doivent être telles que le produit de leur distance par la tangente trigonométrique de leur angle reste constant. On doit donc avoir $\xi = a\alpha$. Une première dérivation donne $\zeta = a\gamma$, et l'on voit que la normale principale appartient aussi au complexe. On en déduit immédiatement le théorème de M. Appell : *le plan polaire de* M, *dans le complexe, est osculateur à* (M). La dérivation de la dernière égalité donne encore $\eta = (a - r)\beta$. En remplaçant ξ, η, ζ par les valeurs précédentes dans $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$ on trouve successivement

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad \gamma = r\frac{d\beta}{ds} = -\frac{d}{ds}\sqrt{ar};$$

puis

$$\frac{\alpha}{\rho} = -\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\beta}{r}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\sqrt{ar} - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{d\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{d}{ds}\sqrt{r}\right)^2\right]}{d\sqrt{r}}.$$

Enfin la substitution de ces valeurs dans la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ nous donne

$$\pm\frac{d\sqrt{r}}{\rho} = d\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{r} - \left(\frac{d}{ds}\sqrt{r}\right)^2}.$$

On voit qu'on peut se donner arbitrairement la torsion en fonction de l'arc; puis, après avoir calculé la flexion au moyen de la dernière équation, on peut affirmer que la ligne trouvée appartient par ses tangentes à un complexe linéaire, dont on sait déterminer l'axe au moyen des formules qui précèdent(**).

(*) PICARD. « *Traité d'Analyse* » t. I, p. 354.

(**) *Rectifications*. P. 39, l. 7 et p. 40, l. 1, lire *où* au lieu de *ou*

Digitized by Google

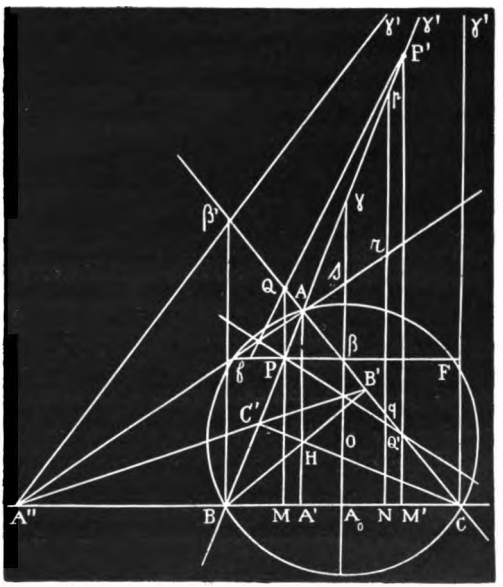
SUR TROIS PARABOLES ASSOCIÉES A UN TRIANGLE ;

par M. Droz-Farny.

Soient A_0, B_0, C_0 les milieux des côtés d'un triangle ABC, et A', B', C' les pieds des hauteurs, qui se coupent en H.

Prenons sur BC deux points M, M' symétriques par rapport à A_0, et élevons en ces points sur BC des perpendiculaires, qui rencontrent AC en Q, Q' et AB en P, P'. Les droites PQ' et P'Q, lorsque la distance A_0M varie, enveloppent une même parabole π_a ; en effet, les points P et Q, P' et Q' se correspondent dans deux ponctuelles semblables.

La parabole π_a touche les supports AB, AC des deux ponctuelles en des points q, p, qui sont les homologues de leur intersection A considérée comme élément de l'autre ponctuelle; on obtient ces points de contact en faisant coïncider MP avec A'A, ce qui amène M'Q' sur la droite Nqp symétrique de AA' par rapport à A_0. Un diamètre de la parabole π_a est donc la droite A''Ar menée par le milieu de pq. Les droites Ap, Aq, Ar, AA' formant un faisceau harmonique, sont coupées par BC suivant une division harmonique; donc A'' est le conjugué harmonique de A' par rapport à BC, et, par suite, appartient à la droite B'C'.



On peut supposer les points M, M' en B, C; par conséquent, si l'on élève Bβ', Cγ' perpendiculaires à BC et rencontrant AC en β', AB en γ', les droites BC, $\beta'\gamma'$ sont des positions des droites PQ', P'Q.

Les droites MP, M'P' peuvent se confondre avec la médiatrice $A_0\beta\gamma$ de BC. $\beta\gamma$ est donc une tangente de π_a ; son point de contact est évidemment le milieu de $\beta\gamma$.

Digitized by Google

BC et $A_0\beta\gamma$ étant deux tangentes rectangulaires, la directrice de π_a est la droite HA_0 qui joint leur point de concours A_0 à l'orthocentre H du triangle ABC circonscrit à la parabole. Remarquons en passant que les droites HA_0, HB_0, HC_0 sont perpendiculaires aux droites AA'', BB'', CC''.

Le foyer F doit se trouver sur la circonférence ABC et sur l'isogonale du diamètre AA'' par rapport à l'angle des tangentes AB, AC. Si donc AA'' coupe la circonférence en f, il suffit de mener la corde fF parallèle à BC.

Le triangle APQ' et celui qui est formé par BC, $A_0\beta\gamma$ et la droite de l'infini sont circonscrits à une même conique; ils sont également inscrits à une même conique. Autrement dit, il existe une hyperbole équilatère passant par les points A, P, Q', A_0 et dont les asymptotes sont parallèles aux droites $A_0\beta\gamma$, BC. Cette courbe est l'hyperbole d'Apollonius du point A par rapport à la conique qui a pour foyers les points B, C, et pour directrices les droites MP, M'Q'.

On peut imaginer deux autres paraboles analogues à π_a, inscrites au triangle ABC et touchant respectivement les médiatrices des côtés BC, CA.

NOTES MATHÉMATIQUES.

6. *Sur un cas particulier du théorème de Maclaurin et Braikenridge, par* M. Pirondini (Parme). — 1° On donne deux droites Ox, Oy et deux points A, B. Une droite A'B' se meut parallèlement à elle-même; soient A', B' les points où elle coupe Ox, Oy. Les droites AA', BB' se coupent en un point P qui engendre une conique.

Si l'on prend pour axes les droites Ox, Oy et que l'on désigne par (a, b), (c, d) les coordonnées des points A, B, l'équation du lieu de P est

$$(1)\quad bx^2 + (kd - a)xy - kcy^2 - b(c + kd)x + c(a + kb)y = 0,$$

où k représente le rapport OA' : OB'.

2° Examinons quelques positions particulières de la droite A'B'. Lorsque cette droite passe par O, P coïncide avec O. Quand elle se transporte à l'infini, les droites AA', BB' deviennent parallèles à Ox, Oy et déterminent un point O_1 de la conique. Menons par A et B des parallèles A_1B_1, A_2B_2 à A'B'; soient A_1, B_1, A_2, B_2 les points où

Digitized by Google

elles coupent Ox, Oy : les points B_1, A_2 appartiennent à la courbe. Enfin, par les points A_5, B_4 où la droite AB rencontre Ox, Oy, menons A_5B_5, A_4B_4 parallèles à A'B' : les positions de P qui correspondent à A_5B_5, A_4B_4 sont les points donnés B, A, et les tangentes en ces points sont BB_5, AA_4 ; c'est ce qu'on vérifie facilement en considérant la sécante A'B' dans une position infiniment voisine de A_5B_5 ou de A_4B_4.

3° Une conique quelconque Σ admet le mode de génération considéré ici. On peut même prendre arbitrairement pour O un point quelconque de la courbe, tracer à volonté les droites Ox, Oy et se donner la direction A'B' ; car si l'on compare l'équation (1) à l'équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$$

des coniques passant par l'origine des coordonnées, on trouve que a, b, c, d sont définis par les égalités

$$a = \frac{k\,(ACD + 2kABE - CE)}{AC\,(k^2A - 2kB + C)},$$

$$b = \frac{-k\,(kAE - CD)}{C\,(k^2A - 2kB + C)}, \text{ etc.}$$

Pour construire les points A et B, menons par les points A_2, B_1 où Σ coupe Ox, Oy, deux parallèles A_2B_2, A_1B_1 à une même direction A'B' ; soient A, B les points où elles rencontrent Σ. La conique qui est engendrée d'après le mode expliqué ci-dessus, au moyen des points A, B, des droites Ox, Oy et de sécantes parallèles à A'B', a, avec la conique donnée Σ cinq points communs, savoir O, A_2, B_1, A, B ; par suite les deux courbes sont identiques.

4° Soit à tracer une conique par cinq points donnés que nous appelons pour plus de facilité O, O_1, A, B, P. Nous menons les droites Ox, Oy respectivement parallèles à O_1A, O_1B ; elles coupent AP en A', Oy en B'. Il suffit maintenant de mener dans l'angle xOy une parallèle quelconque ab à A'B', et de joindre A à a, B à b ; les droites Aa, Bb se couperont constamment sur la courbe cherchée. On voit aussi comment on tracerait les tangentes aux points A et B.

2. *Note de Géométrie*, par M. Gob, professeur à Hasselt. I. *Si, par le centre* O *du cercle circonscrit à un quadrilatère* ABCD, *on mène une droite telle que* O *soit le milieu du segment de cette droite limité aux côtés* AB *et* CD, *le point* O *sera aussi le milieu des segments limités sur cette droite par les côtés* AD, BC *et par les diagonales* AC, BD.

Digitized by Google

Cela revient à dire que si l'on construit les polaires du point O par rapport aux angles formés par les droites AB et CD, AD et BC, AC et BD, ces trois polaires sont parallèles. En transformant la figure par polaires réciproques par rapport au point O, ce théorème revient au suivant : Les milieux des diagonales d'un quadrilatère inscriptible sont en ligne droite avec le centre du cercle circonscrit.

II. *Etant donné un quadrilatère* ABCD, *trouver le lieu d'un point* M *par lequel on puisse mener une droite telle que les trois segments situés sur cette droite et limités aux droites* AB *et* CD, AC *et* BD, AD *et* BC *aient pour milieu commun ce point* M.

On voit comme précédemment que le point M est le centre d'une conique circonscrite au quadrilatère ABCD. Le lieu de M est donc la conique des neuf points de ce quadrilatère.

La théorème I se déduit du théorème de Sturm sur les faisceaux de coniques; le théorème II est équivalent au théorème de Newton sur les coniques tangentes à quatre droites.

---

*BIBLIOGRAPHIE.

New Plane and Solid Geometry by W. W. Beman, Professor of Mathematics n the University of Michigan, and D E. Smith, Principal of the State Normal School at Brockport. New York, Boston, U. S. A., Ginn and Co, 1899 (Cartonné in 12 de IX-382 p.) Prix : 1,25 dollar.

Cet ouvrage est une édition revue de la Géométrie plane et solide de MM. Beman et Smith publiée en 1895. Sans se départir des principes qui les ont guidés dans la première édition (combinaison de la rigueur euclidienne avec les formes modernes de démonstration), ils ont fait ça et là des suppressions ou des additions, de manière à rendre le livre plus pratique pour les maîtres et les élèves.

Sommaire. — Introduction (définitions; les démonstrations en géométrie; propositions préléminaires). *Géométrie plane.* 1. Triangles; parallèles; problèmes; lieux. 2. Égalité des polygones. 3. Cercle (angles au centre; cordes, tangentes; angles formés par les cordes et les tangentes; triangle et quadrilatère inscrit ou circonscrit; deux cercles). Appendice : méthodes. 4. Rapports et proportions (propriétés fondamentales; théorie des limites; faisceaux de droites coupées par des parallèles, ou par des antiparallèles, ou par une circonférence; figures semblables). 5. Mesure des figures planes; division des polygones; polygones réguliers; mesure du cercle. *Appendice.* Propriétés métriques; maxima et minima; lignes concourantes diverses; colinéarité. *Géométrie solide.* 6. Lignes et plans dans l'espace; faisceaux; angles polyèdres. 7. Polyèdres réguliers ou non; prismes, pyramides.

Digitized by Google

8. Cylindre; cône; sphère; géométrie de la sphère; mesure de la sphère; solides semblables. *Tables :* Table numérique; biographies; étymologies; index.

Les démonstrations sont réduites à leurs points essentiels; le livre contient beaucoup de problèmes et d'exercices. Les figures sont très bien faites et très intuitives.

Geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen, bearbeitet von Prof. Dr. M. Schuster, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Oldenburg. Ausgabe B. Für Progymnasien und Realschulen. Leipzig, Teubner (Cartonné, in 8° de VII-111 p. avec 2 planches lithographiées). Prix : 1 marc 60.

Cinq cents problèmes très bien classés sur toutes les parties de la géométrie plane.

---

1. **Geometria metrica e trigonometria** per S. Pincherle, Prof. nella Università di Bologna. Quinta edizione. Hoepli, Milano, 1900 (Cartonné, IV-158 p. in 18 47 fig. dans le texte). Prix : fr. 1.50.

2. **Geometria e Trigonometria della sfera**, per Prof. C. Alasia. Hoepli, Milano, 1900 (Cartonné, VII-207 pp. in 18, 34 fig. dans le texte). Prix : fr. 1,50.

3. **Metodi facili per risolvere i problemi di Geometria elementare** dell' Ing. I. Ghersi. Hoepli, Milano, 1900 (Cartonné, XII-190 pp. in 18, 126 fig. dans le texte). Prix : fr. 1,50.

Ces trois petits volumes appartiennent à l'excellente collection des Manuels Hoepli.

Le premier comprend la mesure des angles plans, des aires planes rectilignes, les relations entre les éléments d'un triangle, la mesure du cercle; la mesure des angles dièdres, du prisme, de la pyramide, du cylindre, du cône, de la sphère (volume et surface); la théorie des fonctions circulaires; la résolution des triangles.

Dans le second, l'auteur a réuni la géométrie de la sphère (le livre VII de Legendre) et la trigonométrie sphérique.

Le troisième contient environ deux cents problèmes de géométrie plane résolus systématiquement d'après diverses méthodes (examen de la figure où l'on suppose le problème résolu; artifices divers; méthodes des lieux géométriques; similitude, etc.).

ESQUISSES BIOGRAPHIQUES

Tchebychef (1821-1894).

Pafnouty Lvovitch Tchebychef (prononcez Tchebychof), le plus éminent des mathématiciens russes contemporains, né le 14|26 mai 1821, de parents nobles résidant dans le gouvernement de Kalooga, district de Borovsk, est mort à Pétersbourg le 26 novembre (8 décembre) 1894.

Digitized by Google

Tchebychef, après de solides études à l'université de Moscou, publia de 1843 à 1853, de savants travaux sur le calcul intégral, la théorie des séries, le calcul des probabilités, et la théorie des nombres, qui le firent nommer successivement professeur de mathématiques appliquées, puis professeur ordinaire à l'Université de Pétersbourg, et plus tard, membre de l'Académie de cette ville (1859). Il faut citer particulièrement, dans cette période de sa vie, ses Mémoires sur le nombre des nombres premiers (1845, 1850) et son analyse magistrale de l'œuvre entière d'Euler, en arithmétique supérieure, en tête de l'admirable édition des *Commentationes arithmeticae* de ce géomètre, édition qu'il fit paraître, avec Bouniakofsky, en 1849.

Pendant plus de quarante ans, Tchebychef n'a cessé de publier de nouveaux mémoires, où abandonnant les recherches de mathématiques pures qui avaient occupé sa jeunesse, il applique son rare esprit d'invention à déterminer, dans une foule de domaines, *avec l'approximation la plus grande possible*, la valeur de certaines quantités définies, *dans un intervalle donné*, par l'analyse, la géométrie ou la mécanique. Bien entendu, dans ce genre de calcul approché où il est chef d'école et maître incontesté, il rencontre maintes fois, chemin faisant, des vérités nouvelles et très cachées d'analyse pure, mais elles semblent pour lui un moyen ou un résultat plutôt que le but principal de ses recherches.

Voici la liste rapide de quelques-unes des questions qu'il a ainsi abordées : 1. Détermination des polynomes entiers ou des fractions rationelles qui diffèrent le moins possible dans un intervalle, d'une fonction donnée, de zéro, d'une racine carrée etc., le polynome étant croissant ou décroissant dans l'intervalle, ou variant toujours dans le même sens; application à la théorie des mécanismes et des cartes géographiques. 2. Intégration finie des différentielles irrationnelles, en particulier des différentielles binomes, à propos desquelles il prouve que les deux cas connus d'intégrabilité sont les seuls, des différentielles elliptiques et de celles qui renferment un radical cubique. 3. Application de la théorie des fractions continues à la théorie de l'interpolation par les moindres carrés, où il retrouve comme cas particuliers, les développements les plus célèbres de l'analyse, et où il détermine des limites remarquables pour certaines intégrales définies. 4. Nouveau calcul des variations où il s'agit de trouver une fonction y, par la condition que la somme des valeurs de F (x, y, y', y'', etc.) pour n valeurs déterminées de x, soit minima ou maxima, puis d'autres questions connexes, dont quelques-uns touchent à la théorie des nombres et à la théorie des fonctions. 5. Valeurs limites des intégrales et des sommes, sujet où, comme dans les précédents, il manie avec la plus grande habileté, la théorie des fractions continues algébriques et où il a été suivi par plusieurs géomètres russes qui ont complété et simplifié ses travaux. 6. Recherches sur la méthode des moindres carrés, où il détermine des limites rigoureuses entre lesquelles sont comprises les sommes ou intégrales considérées.

Tchebychef s'est beaucoup occupé de mécanismes (parallélogramme de Watt, inverseurs et systèmes articulés, etc.). On lui doit plusieurs machines ingénieuses, dont nous ne citerons qu'une seule très curieuse que nous avons vu fonctionner : *le mécanisme qui marche à la façon du cheval.*

Digitized by Google

Tchebychef fut nommé Correspondant de l'Académie des sciences de Paris, en 1860, associé en 1874 : c'est le premier russe qui ait eu cet honneur depuis Pierre-le-Grand.

L'Académie de Pétersbourg publiera deux éditions complètes des Œuvres de Tchebychef, en russe et en français. Le premier volume de l'une des deux éditions (VI-714 p.), nous ne savons laquelle, vient de paraître par les soins de MM. Markof et Sonine (*). (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 784.

(Voir *Mathesis* (2), II, p. 216).

Trouver

$$\int \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\cdots\sin(x-a_m)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\cdots\sin(x-b_n)}\,dx \qquad (1)$$

(J. NEUBERG.)

Posons

$$A = \cos a_1 \cos a_2 \cdots \cos a_m, \quad B = \cos b_1 \cos b_2 \cdots \cos b_n,$$

$$\operatorname{tg} x = X, \quad \operatorname{tg} a_i = A_i, \quad \operatorname{tg} b_i = B_i.$$

Les termes de la fraction (1) pourront s'écrire ainsi :

$$A\cos^m x\,(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m),$$
$$B\cos^n x\,(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n).$$

Nous ferons abstraction des facteurs constants A et B, et nous distinguerons trois cas.

1° $m = n$. L'intégrale cherchée ayant la forme

$$\int \frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}\,dx, \qquad (2)$$

introduisons au dénominateur le facteur $\cos^2 x\,(X^2+1)$, qui est égal à l'unité, et décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_n)}{(X^2+1)(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}$$

(*) La présente notice est un résumé de la brochure intitulée : P. L. *Tchébychef et son œuvre scientifique*, par A. Vassilief, professeur à l'Université de Kasan. Turin, Charles Clausen, 1898 (56 p. in 8° avec portrait. Extrait du *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicata per cura* di GINO LORIA, 1898). On trouve dans cette brochure un beau portrait de Tchebychef et une liste de ses travaux.

Digitized by Google

en éléments simples :

$$\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{C_1}{X-B_1}+\frac{C_2}{X-B_2}+\cdots+\frac{C_n}{X-B_n}.$$

L'intégrale (2) étant ainsi ramenée à

$$\int(C\operatorname{tg}x+D)\,dx+\int\frac{C_1dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1)}+\cdots,$$

est égale à

$$-Cl\cos x+Dx+C_1l(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1)+\cdots=Dx+C_1l\sin(x_1-b_1)+\cdots$$

puisque

$$C+C_1+C_2+\cdots+C_n=0.$$

Nous aurions pu également partir de la forme donnée à la fraction (1) dans la question 1178 (*).

2° $m<n$. On a à chercher

$$\int\frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{\cos^{n-m}x(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}\,dx. \qquad (2)$$

Si $n-m$ est un nombre pair $2k$, remplaçons $\cos^{2k}x$ par $\cos^2x\,(X^2+1)^{-k+1}$, et décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{(X^2+1)^{k-1}(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)},$$

dont le numérateur est de degré $n-2$ en X. L'intégrale (2) sera ramenée à une somme d'intégrales de la forme

$$\int\frac{dx}{\cos^2x(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_i)}=l(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_i).$$

Si $n-m$ est un nombre impair $2k+1$, remplaçons $\cos^{n-m}x$ par $\cos x\,(X^2+1)^{-k}$ et décomposons en fractions simples l'expression

$$\frac{(X^2+1)^k(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}$$

dont le numérateur est de degré $n-1$ en X; nous aurons alors une somme d'intégrales de la forme

$$\int\frac{C_idx}{\cos x(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_i)}=C_i\cos b_i\int\frac{dx}{\sin(x-b_i)}=C_i\cos b_i.\ l\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-b_i).$$

(*) Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 260. La fin de la solution de cette question 1178 contient un lapsus : dans les quatre dernières lignes, il faut lire $x-b_1$ au lieu de $x-a_1$.

Digitized by Google

3° $m > n$. On a à chercher

$$\int \cos^{m-n} x \frac{(X - A_1)(X - A_2) \cdots (X - A_m)}{(X - B_1)(X - B_2) \cdots (X - B_n)} dx. \qquad (4)$$

Si $m - n = 2k$, remplaçons $\cos^{2k} x$ par $\frac{1}{\cos^2 x (X^2 + 1)^{k+1}}$, et décomposons en éléments simples la fraction

$$\frac{(X - A_1)(X - A_2) \cdots (X - A_m)}{(X^2 + 1)^{k+1} (X - B_1)(X - B_2) \cdots (X - B_n)},$$

dont le dénominateur est de degré $m + 2$; l'intégrale sera décomposée en termes de la forme (abstraction faite d'un facteur constant)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x (X^2 + 1)^p} = \int \cos^{2p-2} x \, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b_i)} = l (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b_i).$$

Enfin, lorsque $m - n = 2k + 1$, l'expression (4) peut s'écrire :

$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{(X - A_1)(X - A_2) \ldots (X - A_m)}{(X^2 + 1)^{k+1} (X - B_1) \ldots (X - B_n)} dx$$

et en décomposant, on est conduit à des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\cos x (\operatorname{tg}^2 x + 1)^p} = \int \cos^{2p-1} x dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b_i)} = \cos b_i \, . \, l \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x - b_i).$$

(J. Neuberg.)

Solutions partielles par M. M. Listray et Emmerich.

Question 1066.

(Voir *Mathesis*, (2) t. VI, p. 104).

On considère les coniques ayant un contact du second ordre avec une conique donnée et passant par ses foyers. Trouver le lieu du point de concours des tangentes en ces points. (E. Duporcq.)

Solution par MM. Droz-Farny, Barisien et Déprez. Soient $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ les coordonnées d'un point P de l'ellipse. En représentant par $m (x - a \cos \varphi) + n (y - b \sin \varphi) = 0$ l'équation d'une corde

Digitized by Google

quelconque passant par P, l'équation d'une des coniques cherchées sera

$$[bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab][m(x - a\cos\varphi) + n(y - b\sin\varphi)] + b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La conique devant passer par les foyers, on aura en faisant successivement $y = 0$, $x = +c$; $y = 0$, $x = -c$, pour déterminer m et n,

$$m(c - a\cos\varphi) - nb\sin\varphi = \frac{b^2}{c\cos\varphi - a},$$

$$m(c + a\cos\varphi) + nb\sin\varphi = \frac{b^2}{c\cos\varphi + a};$$

de là, $$m = \frac{b^2\cos\varphi}{c^2\cos^2\varphi - a^2}, \quad n = \frac{-ab^2(1 + \cos^2\varphi)}{\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi - a^2)}.$$

Mais les coordonnées x', y' du pôle de l'axe des x dans la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

sont fournies par les relations :

$$Ax' + By' + D = 0, \quad Dx' + Ey' + F = 0.$$

On trouve aisément :

$$A = \frac{-a^2b^2\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi - a^2}, \quad B = \frac{-ab^2\cos^2\varphi}{\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi - a^2)}, \quad D = 0,$$

$$E = \frac{a^2b^2}{\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi - a^2)}, \quad F = \frac{a^2b^2c^2\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi - a^2};$$

$$y' = \frac{-F}{E} = -\frac{c^2}{b}\sin^2\varphi, \quad x' = \frac{BF}{AE} = \frac{c^2}{a}\cos^2\varphi.$$

Le point d'intersection des tangentes est donc le centre de courbure correspondant au point P : le lieu est la développée de l'ellipse proposée.

Solution géométrique par M. C. Servais. La tangente en M à la conique donnée Σ coupe l'axe focal FF′ en un point T; la polaire de ce point par rapport à la conique Σ′ passant par les foyers F et F′ et ayant en M un contact du second ordre avec Σ, est la normale au point M. Le pôle de FF′ par rapport à Σ′ est donc un point μ de cette normale. Soient M′ un point de Σ′ infiniment voisin de M, S, le pôle de MM′ relatif à Σ′. Les triangles MM′S et FF′μ sont inscrits dans une conique. A la limite, cette courbe est circonscrite au triangle FF′μ, tangente en M à Σ et son rayon de courbure en ce point est la moitié du rayon correspondant de Σ; par suite, μ est le centre de courbure de Σ au point M (BB, 1889, (3), XIX, p. 232).

Digitized by Google

Question 1069.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VI, p. 128).

Quelle relation doit-il exister entre deux circonférences pour que les deux centres soient les deux foyers de la courbe polaire réciproque de l'une des circonférences par rapport à l'autre? (Droz Farny.)

Solution analytique par MM. E. Colart, Déprez, Andrien et Barisien. Soient les deux cercles C et C′ de rayons R et R′. La polaire réciproque de C par rapport à C′ est une conique, ayant C′ pour foyer et pour directrice correspondante la polaire du centre C, et dont l'excentricité est égale à $(R : d)$, d étant la distance des centres.

Si l'on prend le milieu de CC′ pour origine des axes coordonnés, l'équation de cette conique est

$$4R^2y^2 - 4(d^2 - R^2)x^2 + 4d(d^2 - R^2 - 2R'^2)x - (d^2 - 2R'^2)^2 + d^2R^2 = 0.$$

Pour que le centre C soit le second foyer de cette courbe, il faut qu'il soit à l'origine, c'est-à-dire que l'on ait

$$d^2 = R^2 + 2R'^2. \qquad (1)$$

Cette condition entraîne les inégalités $d > R$, $d > R'$; le centre de chaque cercle est donc extérieur à l'autre cercle. D'ailleurs, de (1) on tire

$$R'^2 = \tfrac{1}{2}(d^2 - R^2);$$

donc le rayon R′ est le côté du carré ayant pour diagonale la tangente menée du centre C′ au cercle C.

Ces conditions étant réalisées, la polaire réciproque du cercle C′ par rapport au cercle C est une hyperbole ayant pour équation

$$2R^2y^2 - 4R'^2x^2 = -R^2R'^2;$$

les axes de cette hyperbole sont donc égaux à

$$R \text{ et } R'\sqrt{2} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

Remarque. Pour que la polaire réciproque de C′ par rapport à C ait ses deux foyers en C′ et C, on doit avoir

$$d^2 = R'^2 + 2R^2. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Si les conditions (1) et (2) existent simultanément, on a

$$R = R' = \frac{D}{\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

M. Déprez a également donné une solution géométrique de la question 1066. La solution de M. Retali que nous donnons ci-après se rapporte aux relations (3).

Solution par M. V. Retali. Les deux cercles sont égaux et se coupent sous l'angle de 60°; la distance de leurs centres est $r\sqrt{3}$ (*).

Si la polaire réciproque d'un cercle C^2 par rapport à C'^2 est aussi la polaire réciproque de C'^2 par rapport à C^2, nous savons que C^2 et C'^2 se coupent en 4 points qui forment un groupe équianharmonique sur les deux courbes (**). Soient I, J les points cycliques et A, B les deux points propres communs à C^2 et C'^2 : les faisceaux A(TBIJ), A(T'BIJ) sont équianharmoniques, AT et AT' étant les tangentes en A aux deux cercles. Il s'ensuit que *angle* TAB = T'AB = 30° (***). Les deux cercles C^2, C'^2 sont donc égaux et se coupent sous l'angle de 60°.

Lorsque deux coniques forment un couple équianharmonique, le covariant et le contrevariant fondamentaux de leur système coïncident avec la polaire réciproque de l'une par rapport à l'autre : cette polaire réciproque est donc une hyperbole touchant les tangentes menées aux deux cercles en A et B, *ayant pour foyers les centres des deux cercles*, et passant par les points de contact des deux cercles avec leurs tangentes communes.

×Question 1230.

(Voir *Mathesis* (2) t. IX, p. 176).

Soient a, b, c, d, Q *les côtés et la surface d'un quadrilatère convexe* ABCD, *inscrit à un cercle*; T *la surface du triangle qui a pour sommets les points de concours* E, F, G *des côtés opposés et des diagonales*; T_1 *la surface du triangle dont les côtés sont dirigés suivant les lignes* AC, BD, EF. *Démontrer les formules*

$$\frac{T}{Q} = \frac{2\,abcd}{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)}, \qquad \frac{T_1}{Q} = \frac{4\,a^2b^2c^2d^2}{(a^2b^2 - c^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2)}.$$

(J. Neuberg.)

(*) Voir Retali, *Sopra alcuni gruppi di coniche*, Progréso Mat., T. IV, page 103.

(**) Loc. cit., page 22-23.

(***) Voir *Mathesis*, (1). IX; page 128.

Digitized by Google

Solution par M. EMMERICH. 1° Faisons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = m, \quad BD = n,$$

et désignons par E le point de rencontre des côtés a, c et par F celui des côtés b, d; le point D est supposé à l'intérieur du triangle EBF.

On a

$$T = EDF + EDG + FDG.$$

Les triangles EDF, EDG, FDG ont, avec le triangle ABC, un angle supplémentaire respectivement en D et B, D et A, D et C. Il en résulte

$$\frac{EDF}{ABC} = \frac{ED.FD}{ab}, \quad \frac{EDG}{ABC} = \frac{ED.GD}{am}, \quad \frac{FDG}{ABC} = \frac{FD.GD}{bm}. \qquad (1)$$

Les triangles ADB, ACB sont entre eux comme les produits dn, bm et aussi comme les hauteurs tombant sur AB ou comme ED : EC; on en conclut

$$\frac{ED}{EC} = \frac{dn}{bm} = \frac{d(ab+cd)}{b(ad+bc)}, \quad \frac{ED}{EC-ED} = \frac{d(ab+cd)}{c(b^2-d^2)},$$

$$ED = \frac{d(ab+cd)}{b^2-d^2}.$$

De même,

$$FD = \frac{c(ab+cd)}{a^2-c^2}, \quad DG = \frac{cdn}{ab+cd}.$$

Les égalités (1) prennent maintenant la forme

$$\frac{EDF}{ABC} = \frac{cd(ab+cd)^2}{ab(a^2-c^2)(b^2-d^2)},$$

$$\frac{EDG}{ABC} = \frac{cd^2}{a(b^2-d^2)} \cdot \frac{n}{m}, \quad \frac{FDG}{ABC} = \frac{c^2d}{b(a^2-c^2)} \cdot \frac{n}{m}.$$

Les deux dernières relations donnent

$$\frac{EDG+FDG}{ABC} = \frac{cd(ad+bc)(ab-cd)}{ab(b^2-d^2)(a^2-c^2)} \cdot \frac{n}{m} = \frac{cd(ab+cd)(ab-cd)}{ab(b^2-d^2)(a^2-c^2)};$$

par conséquent,

$$\frac{T}{ABC} = \frac{2cd(ab+cd)}{(b^2-d^2)(a^2-c^2)}. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Mais on a aussi

$$\frac{ABC}{DAC} = \frac{ab}{cd}, \quad \text{d'où} \quad \frac{ABC}{Q} = \frac{ab}{ab+cd}; \tag{3}$$

en combinant (2) et (3) on trouve

$$\frac{T}{Q} = \frac{2abcd}{(b^2-d^2)(a^2-c^2)}.$$

2° Appelons H, I les points de rencontre de EF avec AC, BD. On a

$$\frac{T_1}{Q} = \frac{GH.GI}{mn}. \tag{4}$$

Or

$$\frac{DG}{GB} = \frac{ID}{IB} = \frac{cd}{ab},$$

d'où

$$DG = \frac{cdn}{ab+cd}, \quad ID = \frac{cdn}{ab-cd}, \quad IG = \frac{2abcdn}{a^2b^2-c^2d^2};$$

par analogie,

$$GH = \frac{2abcdm}{a^2d^2-b^2c^2}.$$

Substituons les valeurs de IG et GH dans l'égalité (4), etc.

MM. Dépbez et Plakhovo ont résolu la même question.

Les points E, F, G étant situés sur les trois côtés du triangle ABC, une proposition connue donne immédiatement

$$\frac{EFG}{ABC} = \frac{AE.BF.CG - BE.CF.AG}{AB.BC.CA},$$

où il faut observer la règle des signes.

Supposons le quadrilatère ABCD quelconque, et désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC ; nous aurons

$$\frac{AE}{\beta} = \frac{BE}{\alpha} = \frac{AB}{\alpha-\beta}, \quad \frac{CF}{\beta} = \frac{BF}{\gamma} = \frac{BC}{\gamma-\beta}, \quad \frac{CG}{\alpha} = \frac{GA}{\gamma} = \frac{CA}{\alpha+\gamma}.$$

Par conséquent

$$\frac{EFG}{ABC} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)},$$

ou

$$T.Q = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}, \tag{5}$$

En combinant cette relation avec les égalités

$$\frac{\alpha}{Q} = \frac{bc}{ad+bc}, \quad \frac{\beta}{Q} = \frac{cd}{ab+cd}, \ldots$$

on retrouve la première des formules proposées.

Digitized by Google

Voici une démonstration analytique de la formule (5). Soient (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées rectangulaires des points A, B, C, D. On peut toujours poser

$$x_4 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_4 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

ou plus symétriquement

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 &= 0, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ce système homogène en m_1, m_2, m_3, m_4 montre qu'on peut prendre pour m_1, m_2, m_3, m_4 les valeurs $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent comme ci-dessus les aires BCD, CDA, DAB, ABC.

Des formules (6), on déduit

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_3 + m_4}, \quad \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_3 + m_4}$$

les premiers membres représentent les coordonnées d'un certain point de la droite AB, et les seconds celles d'un point de la droite CA; par suite, on a pour chacune des coordonnées du point E deux expressions. On trouvera de la même manière des expressions pour les coordonnées des points F et G.

Si l'on désigne le produit $(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)(m_1 + m_4)$ par μ, on pourra écrire

$$2\mu T = \begin{vmatrix} m_1 x_1 + m_2 x_2 & m_1 y_1 + m_2 y_2 & m_1 + m_2 \\ m_1 x_1 + m_3 x_3 & m_1 y_1 + m_3 y_3 & m_1 + m_3 \\ m_1 x_1 + m_4 x_4 & m_1 y_1 + m_4 y_4 & m_1 + m_4 \end{vmatrix}.$$

En introduisant à gauche la colonne 1, 1, 1, puis en haut la ligne — 1, 1, 1, 1, on trouve aisément

$$\frac{2\mu T}{m_1 m_2 m_3 m_4} = \begin{vmatrix} -m_1^{-1} & x_1 & y_1 & 1, \\ m_2^{-1} & x_2 & y_2 & 1 \\ m_3^{-1} & x_3 & y_3 & 1 \\ m_4^{-1} & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, en remarquant que les mineurs relatifs à la première colonne sont égaux à $2\alpha, -2\beta, 2\gamma, -2\delta$, on obtient (J. N.)

$$T = -\frac{2 m_1 m_2 m_3 m_4}{\mu}.$$

×Question 1236.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 216).

Si dans un triangle, la droite d'Euler est parallèle à un des côtés, le triangle orthique a ses côtés en progression arithmétique. (Droz Farny.)

Solution par M. J. Déprez. Soient A', B', C', les pieds des hauteurs

Digitized by Google

du triangle ABC; supposons que la droite d'Euler du triangle soit parallèlle au côté BC. On a $AH = 2R \cos A$, et l'angle $AOH = B - C$, d'où la relation $\cos (B - C) = 2 \cos A$.

On a aussi

$$B'C' = R \sin 2A,\ C'A' = R \sin 2B,\ A'B' = R \sin 2C;$$

dès lors,

$$A'C' + B'A' = 2R \sin A \cos (A - C),$$

et comme

$$\cos (B - C) = 2 \cos A,$$

on a

$$A'C' + B'A' = 2R \sin 2A = 2C'B'.$$

Remarques : I. *L'axe orthique du triangle* ABC *est perpendiculaire au côté* BC.

II. D *étant le point de rencontre de* AA′ *avec* B′C′, *on a* :

$$B'D = \tfrac{1}{2} A'B',\quad DC' = \tfrac{1}{2} A'C'.$$

Le point D *est au milieu de* AA′.

III. *On a aussi* : $AA'^2 = 3\, A'C' \times A'B'$.

IV. *Le rayon du cercle inscrit dans le triangle* A′B′C′ *vaut le tiers de la hauteur issue de* A′ *dans le même triangle.*

V. O, H, O_9 *étant respectivement le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, *l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points du même triangle, on a :*

$$AOB + AOC = 2\,BOC,\quad AHB + AHC = 2\,BHC,$$
$$AO_9B + AO_9C = 2\,BO_9C.$$

VI. *Si* H_o *est le réciproque de l'orthocentre du triangle* ABC, *on a* :

$$\frac{1}{AH_oB} + \frac{1}{AH_oC} = \frac{2}{BH_oC}$$

VII. *Les angles du triangle* ABC *satisfont aux relations suivantes :*

$$\cos (B - C) = 2 \cos A;\quad 2 \cos B \cos C = \cos A;$$
$$2 \sin B \sin C = 3 \cos A;\quad \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3;\quad \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2 \operatorname{tg} A;$$
$$\sin 2B + \sin 2C = 2 \sin 2A.$$

M. M. Emmerich, Soons, Lemoine et Delahaye ont résolu la même question.

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

935. D'un point donné P on mène deux tangentes p_1, p_2 à une ellipse donnée; soient q_1, q_2 les tangentes menées d'un second point Q. Le lieu d'un point Q tel que les droites p_1, q_1, p_2, q_2 soient les côtés d'un quadrilatère inscriptible à un cercle est une hyperbole équilatère passant par P et par les quatre foyers, réels ou imaginaires, de l'ellipse donnée. (MALO.)

Si l'on prend l'équation d'une tangente sous la forme $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$, les coefficients angulaires (m_1, m_2) des tangentes issues du point P (α, β) sont racines de

$$m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\alpha\beta + \beta^2 - b^2 = 0,$$

et les coefficients (n_1, n_2) des tangentes menées du point Q (x, y) sont racines de

$$n^2(x^2 - a^2) - 2nxy + y^2 - b^2 = 0.$$

La condition du problème donne

$$\frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = \frac{n_1 + n_2}{1 - n_1 n_2}, \text{ etc.}$$

936. Démontrer que la relation

$$\frac{a^2 - bc}{a} + \frac{b^2 - ca}{b} + \frac{c^2 - ab}{c} = 0$$

entraîne la suivante

$$\frac{a}{a^2 - bc} + \frac{b}{b^2 - ca} + \frac{c}{c^2 - ab} = 0. \qquad \text{(NANSON.)}$$

Cela revient à dire que si l'on chasse les dénominateurs, le premier membre de la seconde équation est divisible par celui de la première équation.

937. Les circonférences décrites sur les côtés BC, CB, AB d'un triangle acutangle ABC comme diamètres rencontrent respectivement les hauteurs AA′, BB′, CC′ aux points (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2). Démontrer que les quadrilatères $B_1C_1B_2C_2$, $C_1A_1C_2A_2$, $A_1B_1A_2B_2$ sont inscriptibles, les centres des circonférences circonscrites étant respectivement A, B, C. Les rayons de ces cercles sont égaux à

$$\sqrt{bc\cos A}, \quad \sqrt{ca\cos B}, \quad \sqrt{ab\cos C};$$

H en est le centre radical et sa puissance par rapport aux trois cercles est égale à

$$4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Digitized by Google

Les surfaces des quadrilatères $B_1C_1B_2C_2$, $C_1A_1C_2A_2$, $A_1B_1A_2B_2$ ont pour expressions

$$4R^2 \sin^2 A \cos A \sqrt{\sin 2B \sin 2C}, \qquad \text{(A. C.)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1261. Soient l, m, n les projections d'une longueur donnée MM′ sur les trois côtés d'un triangle ABC. Quelle orientation faut-il donner à MM′ pour que $mn + nl + lm$ soit maximum ou minimum? (E. LEMOINE).

1262. On considère un cercle O, un diamètre fixe AB de ce cercle, et un cercle O′ tangent intérieurement au cercle O en A. Soit PQ une corde variable du cercle O qui est tangente au cercle O′. Montrer que :

1° Les lieux du centre de gravité et de l'orthocentre des triangles APQ et BPQ sont des limaçons de Pascal.

2° Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle APQ est un cercle.

3° Trouver le lieu des centres des cercles exinscrits au triangle APQ.

(E. N. BARISIEN.)

1263. Démontrer la formule :

$$1 + C_{m-1,1} + C_{m-2,2} + C_{m-3,3} + \cdots = u_{m+1}$$

$C_{m,n}$ désigne le nombre des combinaisons de m objets, n à n; le dernier terme du premier membre est $C_{\frac{1}{2}(m+1),\frac{1}{2}(m-1)}$ ou $C_{\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}m}$, suivant que m est impair ou pair; u_m est le $(m+1)^e$ terme de la suite de Fibonacci, où $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. (BOUTIN.)

×**1264**. Les symétriques des côtés AB, BC, CA d'un triangle respectivement par rapport aux côtés BC, CA, AB forment un nouveau triangle A′B′C′. Si R, R′ désignent les rayons des cercles circonscrits aux deux triangles ABC, A′B′C′, démontrer que

$$\frac{R'}{R} = \frac{\sin A \sin B \sin C + \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{\sin A' \sin B' \sin C'}.$$

Les triangles ABC, A′B′C′ ne sont homologiques que lorsqu'ils sont équilatéraux. (J. NEUBERG).

Digitized by Google

SUR LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE;

par M. J. Wasteels, professeur à l'Athénée royal de Gand.

1. Soient a, b, c, etc. les chiffres électoraux des différentes listes, c'est-à-dire les nombres de bulletins valables favorables à chacune d'elles; soit n le nombre de siéges à répartir entre ces listes.

Pour faire le partage des siéges d'après la loi belge, on considère les séries de nombres

$$a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{3},\ \ldots\ldots\ldots \tag{1}$$

$$b,\ \frac{b}{2},\ \frac{b}{3},\ \ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

$$c,\ \frac{c}{2},\ \frac{c}{3},\ \ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

. . . . . .

et l'on compose une suite de n termes en prenant les n nombres les plus grands parmi ceux des séries (1), (2), (3),... Soient $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}, \ldots$ les derniers nombres des séries (1), (2), (3),... qu'il a fallu employer. Alors, p siéges reviennent à la 1re liste, q à la 2e, r à la 3e, etc.

Il peut arriver qu'en rangeant par ordre de valeurs décroissantes les termes des séries (1), (2), (3), etc., après avoir écrit $(n - t)$ termes, il y ait, parmi ceux qui restent, plus de t termes de même valeur, de sorte qu'il y ait du doute au sujet des t derniers termes à prendre. La loi indique la règle d'après laquelle on détermine alors ces t termes.

2. Nous nous proposons d'étudier la signification des nombres $p, q, r, \ldots\ldots$ de siéges qui reviennent à chaque liste.

3. Considérons d'abord le cas où il existe dans les séries (1), (2), (3),... n termes plus grands que tous les autres termes.

Alors, $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}, \ldots$ étant les derniers termes de ces séries qu'il faut employer, on a les inégalités :

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{p} > \frac{b}{q+1}, & \frac{a}{p} > \frac{c}{r+1}, & \ldots\ldots \\ \frac{b}{q} > \frac{a}{p+1}, & \frac{b}{q} > \frac{c}{r+1}, & \ldots\ldots \\ \frac{c}{r} > \frac{a}{p+1}, & \frac{c}{r} > \frac{b}{q+1}, & \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{4}$$

. . . . . .

Digitized by Google

Prenons le terme général du développement de $(a+b+c+\cdots)^n$. Ce terme est

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \ldots} . a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots,$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$.

Cherchons les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pour lesquelles ce terme est maximum; ces valeurs sont les mêmes que celles qui rendent maximum le produit

$$\frac{a^\alpha}{P_\alpha} \times \frac{b^\beta}{P_\beta} \times \frac{c^\gamma}{P_\gamma} \times \cdots$$

ou bien

$$\frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \times \cdots \times \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{1} \times \frac{b}{2} \times \cdots \times \frac{b}{\beta} \times \frac{c}{1} \times \frac{c}{2} \times \cdots \times \frac{c}{\gamma} \times \cdots \quad (5)$$

Or, ce dernier produit est le plus grand possible, si $\alpha=p, \beta=q, \gamma=r, \ldots$

En effet, pour passer du produit

$$\frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \times \cdots \times \frac{a}{p} \times \frac{b}{1} \times \frac{b}{2} \times \cdots \times \frac{b}{q} \times \frac{c}{1} \times \frac{c}{2} \times \cdots \times \frac{c}{r} \times \cdots \quad (6)$$

à l'un des autres produits représentés par l'expression (5), il faut supprimer certains facteurs et introduire un même nombre d'autres facteurs, par exemple, supprimer $\frac{a}{p}$ ou $\frac{a}{p}$ et $\frac{a}{p-1}$ et introduire $\frac{b}{q+1}$ ou $\frac{b}{q+1}$ et $\frac{c}{r+1}$; mais d'après les inégalités (4), les facteurs supprimés seront plus grands que ceux que l'on introduit, de sorte que le nouveau produit sera plus petit que (6).

Il résulte de ce qui précède que $\frac{P_n}{P_p . P_q . P_r \ldots} a^p b^q c^r \ldots$ est le terme le plus grand du développement de $(a+b+c+\cdots)^n$.

4. Supposons que les listes en présence représentent tous les partis de la circonscription électorale et que les nombres d'adhérents de chaque parti soient proportionnels aux chiffres électoraux $a, b, c, \ldots$

Alors,

$$\frac{a}{a+b+c+\cdots}=A, \quad \frac{b}{a+b+c+\cdots}=B, \quad \frac{c}{a+b+c+\cdots}=C, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

expriment les probabilités qu'en prenant au hasard un habitant de la circonscription électorale, ce sera un partisan de la 1re liste, de la 2e, de la 3e, etc.

Cherchons maintenant la probabilité qu'en prenant au hasard n habitants de la circonscription électorale pour composer la députation, il s'en trouve α partisans de la 1re liste, β partisans de la 2e, γ partisans de la 3e, etc. Nous trouvons

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \ldots} . A^\alpha . B^\beta . C^\gamma \ldots = \frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \ldots} \times \frac{a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots}{(a+b+c+\ldots)^n} .$$

Cette probabilité est donc la plus grande possible, si $\alpha = p$, $\beta = q$, $\gamma = r \ldots$.

Donc, en prenant de toutes les manières une députation de n habitants et en cherchant chaque fois de combien d'adhérents de chaque parti elle est composée, on voit que la députation que l'on rencontrera le plus souvent sera celle dans laquelle il y a p partisans de la 1re liste, q de la 2e liste, r de la 3e, etc.

5. Considérons maintenant le cas où il est impossible de trouver dans les séries (1), (2), (3), ... n termes plus grands que tous les autres.

Supposons, par exemple, que $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ et qu'il y a dans les séries (1), (2), (3) ... $n - 2$ termes plus grands que $\frac{a}{p}$.

Soient $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{q}$ les termes qu'il faut y ajouter pour avoir les n termes voulus, de sorte que les termes des séries (1), (2), (3) ... qu'il faut employer sont

$$a, \frac{a}{2}, \ldots \frac{a}{p}$$

$$b, \frac{b}{2}, \ldots \frac{b}{q}$$

$$c, \frac{c}{2}, \ldots \frac{c}{r-1} .$$

Dans ce cas, on trouverait, en raisonnant comme précédemment, que

Digitized by Google

dans le développement de $(a+b+c+\cdots)^n$, il y a 3 termes égaux :

$$\frac{P_n}{P_p \cdot P_q \cdot P_{r-1} \cdots} a^p \cdot b^q \cdot c^{r-1} \cdots, \quad \frac{P_n}{P_{p-1} \cdot P_q \cdot P_r \cdots} a^{p-1} \cdot b^q \cdot c^r \cdots,$$

$$\frac{P_n}{P_p \cdot P_{q-1} \cdot P_r \cdots} a^p \cdot b^{q-1} \cdot c^r \cdots,$$

plus grands que tous les autres termes.

Considérons maintenant la probabilité qu'en prenant au hasard n habitants de la circonscription électorale, il se trouve α partisans de la 1e liste, β partisans de la 2e, γ partisans de la 3e, etc. On voit qu'elle est la même pour chacun des 3 systèmes :

$$\begin{array}{llll} \alpha = p, & \beta = q, & \gamma = r-1, & \cdots \\ \alpha = p-1, & \beta = q, & \gamma = r, & \cdots \\ \alpha = p, & \beta = q-1, & \gamma = r, & \cdots, \end{array}$$

mais qu'elle est plus petite pour tous les autres systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Donc, la députation formée de p adhérents de la 1e liste, q de la 2e, $r-1$ de la 3e, etc. est encore telle qu'il n'en existe pas que l'on rencontre *plus souvent*, en prenant au hasard n habitants de la circonscription ; mais il en existe 2 autres que l'on rencontre *aussi souvent*.

En général, s'il y a T fractions égales à $\frac{a}{p}$ et s'il ne faut en prendre que t, il y a $C_{x,t} = \frac{T(T-1)(T-2)\ldots(T-t+1)}{1.2.3\ldots t}$ députations pour lesquelles la probabilité est la même et plus grande que pour les autres députations.

SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE ;

par M. E. Barisien.

(Suite, voir *Mathesis*, (2), IX, p. 269).

46. Lieu de l'orthocentre du triangle ABC. L'aire de ce lieu est l'expression U de (42), dans laquelle

$$A = bc^2 + ab^2 - R(a^2+b^2), \quad B = -bc^2,$$
$$A' = ac^2 + a^2b - R(a^2+b^2), \quad B' = ac^2.$$

Digitized by Google

47. Aire du lieu du centre de gravité du triangle αBC,

$$U = \frac{\pi ab}{3} + \frac{4}{9}\frac{\pi a^2 b^2}{(a+b)^2}.$$

48. Aire du lieu du centre du cercle circonscrit au triangle αBC : $U = \frac{1}{4}\pi(a-b)^2$.

On pourrait de même trouver l'aire du lieu de l'orthocentre du triangle αBC et celle du lieu des centres des cercles des neuf points des triangles αBC et ABC.

49. Aire du lieu du point milieu de la droite joignant les centres ω et ω' des cercles circonscrits à chacun des triangles ABC et αBC : $U = \frac{\pi c^4}{8ab}$.

L'aire est le tiers de l'aire de la développée de E.

50. On prend le symétrique ω_1 du point ω par rapport à O. Le lieu du milieu de la droite $\omega_1\omega'$ est la courbe :

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = \frac{c^4R^2}{4}(x^2+y^2); \quad U = \frac{\pi(a^2+b^2)(a-b)^2}{8ab}.$$

51. Aire du lieu du centre de gravité du triangle A'B'C' :

$$U = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

52. Aire du lieu de l'orthocentre du triangle A'B'C' :

$$U = 3\pi R^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

53. Aire du lieu du centre du cercle des neuf points du triangle A'B'C' :

$$U = \frac{3\pi R^2}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

54. Lieu du centre du cercle exinscrit au triangle ABC :

$$(x^2+y^2)^2 = 4(b^2x^2 + a^2y^2), \quad U = 2\pi(a^2+b^2).$$

55. Lieu du milieu des droites AA''', BB''', CC''' : $b^6x^2 + a^6y^2 = \frac{1}{4}a^4b^4$.

56. La droite qui joint le point A au symétrique de A''', par rapport à O, est normale à l'ellipse,

$$\frac{x^2}{b^6} + \frac{y^2}{a^6} = \frac{a^2b^2c^4}{(a^6-b^6)^2}.$$

57. Les droites AA''', BB''', CC''' sont normales à une même ellipse.

Digitized by Google

58. Les pieds et les milieux des hauteurs du triangle $A'''B'''C'''$; les points d'intersection des couples de droites (AA''', BC), $(AA''', B'C')$, $(AA', B'C')$, $(AA'', B'C')$, (AA'', BC); le point de rencontre de $B'C'$ avec la hauteur du triangle ABC issue de A ont des coordonnées de la forme

$$x = \frac{A\cos\varphi + B\cos^5\varphi}{A_1^2\cos^2\varphi + B_1^2\sin^2\varphi}, \quad y = \frac{A'\sin\varphi + B'\sin^5\varphi}{A_1^2\cos^2\varphi + B_1^2\sin^2\varphi}.$$

Ces points décrivent des courbes unicursales fermées dont l'aire a pour expression

$$\frac{\pi}{2}\left[AA'\frac{(A_1^2+B_1^2)}{A_1^3B_1^3} + \frac{3(AB'+BA'+BB')}{A_1B_1(A_1+B_1)^2} + \frac{BA'(2A_1+B_1)}{A_1^3(A_1+B_1)^2} + \frac{AB'(2B_1+A_1)}{B_1^3(A_1+B_1)^2}\right].$$

59. Les hauteurs du triangle $A'''B'''C'''$ sont normales à l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = (a^2+ab+b^2)^2.$$

60. Le lieu du point de rencontre de OA avec la hauteur du triangle $A'''B'''C'''$ partant de A''', est l'ellipse précédente.

61. Lieu du point de rencontre de OA et BC :

$$(bx^2+ay^2)^2 = R^2(b^2x^2+a^2y^2); \quad U = \frac{\pi R\sqrt{ab}}{2}.$$

62. Lieu du point de rencontre de OA′ avec la hauteur du triangle $A'''B'''C'''$ partant de A''' :

$$x^2+y^2 = (a^2+b^2+ab)^2\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}.$$

63. Lieu du point de rencontre de OA′ et BC′ :

$$(ax^2+by^2)^2 = R^4(x^2+y^2), \quad U = \frac{\pi R^5}{2\sqrt{ab}}.$$

64. Aire de l'enveloppe de la parallèle à $B'''C'''$ menée par A''' :

$$U = \pi(a+b)^2 - \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×8. ***Sur les problèmes de maximum et de minimum.*** De l'identité

$$xy = (x+y)^2 - (x-y)^2,$$

on conclut ordinairement que *le produit de deux facteurs variables dont la somme est constante, est maximum lorsque ces facteurs sont égaux.*

Digitized by Google

Cependant, si l'égalité des facteurs est impossible, le maximum du produit a lieu lorsque la différence des facteurs est minimum.

Voici un exemple de cette remarque; nous l'empruntons au n° du 1er janvier 1900 du *Journal de Vuibert*. *Étant donnée une corde* AB *d'une circonférence* O, *mener un diamètre* CD *qui soit divisé par la corde* AB *en deux parties* CE, ED *dont le produit soit maximum*. Si le diamètre CD passe à l'intérieur de l'angle AOB, la somme CE + ED = 2R et le maximum du produit CE . ED a lieu lorsque CD est perpendiculaire à AB; car alors la différence CE — ED devient minimum. Si le diamètre CD ne passe pas à l'intérieur de l'angle AOB, la différence des segments CE, ED est constante et le produit CE . ED devient infini lorsque le diamètre est parallèle à AB.

Comment varie le produit CE. ED lorsque AB est remplacé par une droite qui ne coupe pas la circonférence?

×9. *Sur la question d'examen*, 934 (*Mathesis*, février 1900, p. 55). « *On a la relation* $a\gamma + c\alpha = b\delta + d\beta$ *entre les côtés* $a =$ AB, $b =$ BC, $c =$ CD, $d =$ DA *d'un quadrilatère inscriptible et les perpendiculaires* α, β, γ, δ *abaissées d'un point intérieur sur ces côtés.* » Soient E le point de rencontre des côtés b, d et F celui des côtés a, c; on suppose que CD passe entre AB et E, et BC entre AD et F. Construisons le parallélogramme BCDP, et appelons G, H les points de rencontre de DP avec AB et de BP avec AD; enfin menons les droites HG, AP.

Je dis d'abord que les droites HG et EF sont parallèles. En effet, les couples de parallèles DG et EB, HB et DF donnent

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AB}{AF}, \quad \frac{AG}{AB} = \frac{AD}{AE};$$

d'où AD. AB = AH. AF = AG. AE.

Cela posé, prenons respectivement sur EB, EA, FB, FC les longueurs EX = d, EY = b, FZ = c, FU = a. Les triangles EYX et DPA, FZU et BPA seront égaux; par suite, YX = AP = UZ, angle EYX = DPA, angle FZU = BPA. Mais le quadrilatère ABCD étant inscriptible, il en est de même du quadrilatère AGPH; donc

$$\textit{angle}\ EYX = DPA = DHG, \quad \textit{angle}\ FZU = BPA = BGH;$$

et par conséquent YX et UZ sont parallèles à HG et à EF.

Donc si M est un point quelconque du plan ABCD, les quadrilatères MXEY, MZFU sont équivalents, comme composés de triangles ayant des

Digitized by Google

bases égales YX = UZ et même somme des hauteurs correspondantes. En décomposant ces quadrilatères en triangles au moyen des diagonales ME, MF, on trouve la relation proposée : $a\gamma + c\alpha = b\delta + d\beta$. (A.C).

Pour une autre démonstration, voir *Journal de Vuibert*, décembre 1899.

×10. *Sur l'hexagone de* PASCAL. Soient A, B′, C, A′, B, C′ les sommets consécutifs d'un hexagone quelconque inscrit à une circonférence, et appelons A_1, B_1, C_1 les points de concours des couples de côtés opposés B′C et BC′, CA′ et C′A, A′B et AB′. Alors les circonférences circonscrites aux triangles A_1BC, B_1CA, C_1AB concourent en un même point D, et ce point est situé à la fois sur les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ; donc les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite.

Cette démonstration ne s'appuie que sur les deux premiers livres de Legendre.

Semblablement, les circonférences $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$ concourent en un même point D′. Les points D, D′ sont équidistants du centre de la circonférence ABC. (L. GÉRARD, *Bull. de Math. él.*, 2e année. p. 264).

Cette figure jouit probablement d'autres propriétés assez curieuses, se rapportant aux centres des six circonférences A_1BC_1, ..., aux secondes intersections des circonférences A_1BC et $A_1B'C'$...Il y a là un *sujet d'étude* très intéressant. (J. N.).

BIBLIOGRAPHIE.

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von H. BURKHARDT und W. F. MEYER. Band I, Heft III (pp. 225-352), Heft IV (353-512). Band II, Heft I (pp. 1-160). Leipzig, Teubner, 1899. Prix : 3 marcs 80, 4 mars 80, 4 marcs 80.

Voici l'indication des sujets traités dans ces trois livraisons de l'Encyclopédie, publiées respectivement en septembre, octobre et août 1899.

I. *Fonctions rationnelles d'une variable; leurs zéros*, par E. NETTO, professeur à l'Université de Giessen. Cette section contient les formules d'interpolation, le calcul des différences, le théorème : *toute équation algébrique a une racine* et ses conséquences immédiates, la théorie du plus grand commun diviseur; propriétés des résultants et discriminants.

Fonctions rationnelles de plusieurs variables par E. NETTO. Théorie de l'élimination; éliminants, résultants, jacobiens, hessiens.

Digitized by Google

Théorie arithmétique des grandeurs algébriques; figures algébriques, par G. LANDSBERG, privat-docent à l'Université de Heidelberg. Résumé des difficiles recherches de Kronecker, Weber, Dedekind, Hilbert, Weierstrass, etc.

Invariantologie, par W. Fr. MEYER, professeur à l'Uuniversité de Königsberg. L'auteur, à qui l'on doit une histoire de l'invariantologie, est parvenu à condenser une matière immense en 84 pages, sous les titres suivants : Préliminaires; équivalence des formes; formes apparentées; procédés invariantifs; extension, groupes spéciaux, formes spéciales.

Séparation et approximation des racines des équations, par C. RUNGE, professeur à l'Ecole technique de Hanovre.

Fonctions rationnelles des racines; fonctions symétriques, etc., par K. Th. VAHLEN.

Théorie de Galois et applications, par C. HÖLDER, professeur à l'Université de Leipzig. Théorie des groupes; résolubilité des équations (la fin paraîtra dans la livraison suivante).

II. *Principes de la théorie générale des fonctions*, par A. PRINGSHEIM, professeur à l'Université de Munich. Résumé des recherches les plus minutieuses des géomètres sur les limites, la continuité, la discontinuité, les singularités des fonctions.

Calcul différentiel et calcul intégral, par M. A. VOSS, professeur à l'Université de Würzbourg. Calcul différentiel avec les applications analytiques ordinaires : théorème de Taylor, maxima et minima, les cas difficiles étant examinés avec grand soin. Calcul intégral; premiers principes; étude des relations des limites de sommes simples ou multiples avec les intégrales définies (inverses de dérivées); méthode de Gauss et autres méthodes analogues ou élémentaires pour l'approximation des intégrales définies; planimètres et intégraphes.

Intégrales définies, par M. G. BRUNEL, professeur à l'Université de Bordeaux. Préliminaires. Condition pour qu'une intégrale définie soit bien déterminée. Intégration des séries. Intégrales multiples. Détermination des intégrales définies. Premiers principes de la théorie de la fonction gamma (la seconde moitié de cette section sera publiée dans la livraison suivante).

Dans ces trois livraisons comme dans les précédentes, la bibliographie la plus riche, en tête de chaque section et surtout dans les notes au bas des pages donne au lecteur tous les renseignements historiques nécessaires ou utiles, pour étudier à fond, s'il le désire, les théories résumées dans le texte. (P. M.)

Premiers principes de Géométrie moderne à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation par E. DUPORCQ, ancien élève de l'Ecole polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1899. Un vol. de VII-160 pages in-8°. Prix : 3 fr.

Cet ouvrage, sans avoir la prétention d'être un traité complet, est très propre à familiariser les élèves de nos Ecoles spéciales et de la candidature en sciences physiques et mathématiques avec les méthodes rapides de la Géométrie moderne. Il complète souvent les cours de géométrie élémentaire et de géométrie analyti-

Digitized by Google

que en faisant connaître aux lecteurs des démonstrations simples de ces propositions intéressantes, *plus souvent citées que démontrées*, et il a le grand avantage de leur ouvrir des horizons nouveaux.

Voici un sommaire des matières traitées dans les six chapitres qui composent le livre : I. Emploi des imaginaires. Caractère analytique de la Géométrie moderne par suite de cet emploi. Premières notions sur les transformations. II. Divisions et faisceaux homographiques. Involution. Génération des courbes et des surfaces du second degré. Cubiques gauches. III. Transformations homographiques et corrélatives. Homologie. IV. Principales propriétés des coniques. Théorèmes de Desargues, Sturm, Pascal, Brianchon. Pôles et polaires. Cercle orthoptique. Quadrilatères inscrits à une conique et circonscrits à une autre. Théorème de Joachimsthal. Coniques harmoniquement circonscrites ou inscrites à une conique. V. Principales propriétés des quadriques. Pôles et plans polaires. Intersection de deux quadriques. Faisceaux et réseaux de quadriques. Foyers et focales. Cubique des normales. Quadriques harmoniquement circonscrites et inscrites. Théorème de Hesse. Construction linéaire d'une quadrique. Théorèmes de Faure, de Picquet. VI. Etude de quelques transformations. Applications des transformations homographiques et corrélatives. Représentation plane des quadriques. Inversion. Transformations quadratiques planes. Transformation de Lie. (J. N.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 785.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 44).

Notes. I. Le résultat de l'élimination directe de x, y, z entre les équations (7) est, en appelant Δ le déterminant qu'indique M. Neuberg, $A_{11}^2 A_{22}^2 A_{33}^2 (\Delta)^2 = 0$.

Les hauteurs représentées par les équations $A_{11}=0$, $A_{22}=0$, $A_{33}=0$ ne peuvent faire partie du lieu ; il reste donc deux fois la cubique Δ.

Il se présente ici une curieuse correspondance point par point de trois courbes, l'ellipse $Ayz + Bzx + Cxy = 0$, la cubique $\Delta = 0$ et la quartique : $(B^2 - C^2)y^2z^2 + (C^2 - A^2)z^2x^2 + (A^2 - B^2)x^2y^2 = 0$. Cette dernière a trois points doubles en A, B, C, sommets du triangle donné ; elle est donc unicursale (ou de genre zéro), comme la conique et la cubique Δ. On voit facilement que cette dernière est unicursale ; car en prenant par exemple le rapport $(\beta : \gamma) = \lambda$ comme paramètre, tenant compte de $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, on exprime x, y, z à un facteur de proportionnalité près, par des polynômes du 3e degré en λ.

Digitized by Google

Quand le point M décrit la conique, les droites AM, BM, CM, déterminent des points M_a, M_b, M_c; et il en résulte des points M'_a, M'_b, M'_c d'une seule manière possible, et aussi un point M′ unique correspondant à M de la conique. Mais par M′ on peut mener encore trois tangentes aux paraboles déterminées par les groupes de quatre tangentes (BC, H_bH_c, BH_b, CH_c), ... Il en résulte sur B C, CA, AB trois nouveaux points μ_a, μ_b, μ_c qui joints respectivement à A, B, C déterminent un point μ de la quartique. (Espanet).

II. La note de M. Espanet est fort intéressante; elle explique que le lieu du point M′ peut être irréductible et que celui de M se compose de deux courbes. Cependant la correspondance entre les points homologues des trois courbes mériterait un examen plus approfondi. La circonstance remarquable que présente la question 785, a-t-elle déjà été rencontrée dans l'étude des *liaisons* ou des *connexes?*

Les sommets et les hauteurs du triangle ABC jouent un rôle assez curieux qu'il convient de signaler : Le sommet A par exemple peut être considéré comme une position de M, et le point M′ est alors un point quelconque de la hauteur AH_a. En effet, si M est en A, M_b et M_c se confondent avec A et M_a est un point quelconque de BC; les droites $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ coïncident avec la hauteur AH_a, de sorte qu'elles concourent avec la ligne $M_aM'_a$ dans toutes les positions de M_a.

Nous consacrerons un article spécial aux paraboles enveloppes des droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$; ces courbes ont reçu le nom de *paraboles de Brocard* (*Mathesis*, 1886, Suppl. et 1890, p. 166) (J. N.)

Question 1075.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 142).

Le point de concours des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est sur la directrice de la parabole inscrite à ce quadrilatère. (E. Duporcq.)

Solution par MM. Emmerich, Déprez et Soons. D'après un théorème connu, l'orthocentre d'un triangle dont les côtés touchent une parabole est situé sur la directrice. Quatre tangentes forment quatre triangles dont les orthocentres jouissent de la propriété rappelée. D'autre part, les orthocentres des quatre triangles formés par un quadrilatère complet se trouvent sur l'axe radical des cercles dont les diamètres sont les trois

Digitized by Google

diagonales. Supposons maintenant le quadrilatère ABCD inscriptible et soit E le point de concours des diagonales. De EA. EC = EB. ED on conclut que le point E appartient à l'axe radical des cercles décrits sur AC et BD comme diamètres, c'est-à-dire que le point E est situé sur la directrice de la parabole.

Solution par M. H. MANDART. Soient O le point de concours des diagonales AC, BD du quadrilatère inscrit ABCD, MN la troisième diagonale de ce quadrilatère, M étant l'intersection de AB et CD.

On sait que les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique forment un triangle conjugué par rapport à la conique; O est donc le pôle de MN et si F est le second point de rencontre des cercles MBC, CDN, c'est-à-dire le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère, on a :

$$\text{angle MFC} = \text{ABC} = \text{CDN} = 180^\circ - \text{CFN},$$

$$\text{MFC} + \text{CFN} = 180^\circ,$$

F est donc un point de MN et conséquemment, la polaire de F ou la directrice de la parabole passe par O.

Autre solution par M. Droz Farny, qui démontre que les différents quadrilatères qu'on peut inscrire à la même circonférence et circonscrire à la parabole donnée ont même point d'intersection des diagonales.

M. Déprez donne également une solution analytique.

M. Soons rappelle les propriétés suivantes de la même figure (notations de M. Mandart) : 1° NF : MF = NC. NB : MC. MD ; 2° Les angles CFA, BFD ont la même bissectrice MN ; 3° La perpendiculaire élevée en F sur MN passe par O et par le centre du cercle ABCD ; 4° Si le quadrilatère est en même temps circonscriptible à un cercle, le centre I de ce cercle est situé sur la droite FO, et l'on a $\overline{FI}^2 = FA.FC = FB.FD = FM.FN$.

Question 1150.

(Voir *Mathesis* (2) t. VII, p. 279).

On considère tous les triangles ABC *ayant même base* BC *et dans lesquels les angles* B *et* C *ont un rapport donné* K ; *soient* A', B', C' *les pieds des hauteurs et* H *leur point de concours.*

1° B'C' *enveloppe une hypocycloïde.*

2° A'C' *et* A'B' *enveloppent des épicycloïdes.*

Digitized by Google

3° *Le centre* O_9 *du cercle des neuf points de* ABC *décrit la polaire réciproque d'une hypocycloïde par rapport à un certain cercle.*

4° *Le cercle* Q *enveloppe une podaire de polaire réciproque d'une hypocycloïde (polaire prise par rapport à un certain cercle).*

5° *Trouver les lieux du sommet* A, *de l'orthocentre* H *et du centre de gravité* G *de* ABC.

Cas particulier de $K = 2$. (Déprez).

Solution par M. A. Droz-Farny. Lemme I. A partir d'un point A pris sur une circonférence O de rayon R, deux points B et C se meuvent uniformément et dans le même sens sur cette courbe avec des vitesses dont le rapport est K ($K > 1$).

La droite BC enveloppe une épicycloïde décrite par le point A du cercle mobile de rayon $r = \frac{R}{K+1}$ roulant sur un cercle fixe concentrique avec O et de rayon $\rho = \frac{K-1}{R+1} R$. Si les points se meuvent en sens contraire, BC enveloppe une hypocycloïde décrite par le point A du cercle mobile de rayon $r = \frac{R}{K-1}$ roulant à l'intérieur du cercle fixe concentrique au cercle donné et de rayon $\rho = \frac{K+1}{K-1} R$.

Voir pour la démonstration élémentaire : *Note sur une enveloppe par* S. F. W. Baehr, N. A. M., 1881.

Lemme II. Chercher l'enveloppe d'une circonférence variable passant constamment par un point fixe A et dont le centre O se meut sur une courbe donnée C.

Soient deux positions voisines O′ et O″ du centre O. Les circonférences correspondantes se coupent en un second point P′ tel que AP′ est perpendiculaire sur O′O″ et divisée par cette droite en B′ en parties égales. A la limite, P′ devient le point de contact de la circonférence O avec son enveloppe; AP est perpendiculaire sur la position limite de la sécante O′O″, c'est-à-dire sur la tangente en O à C, d'où le théorème :

L'enveloppe cherchée est la podaire par rapport au pôle A d'une courbe homothétique de C pour le rapport de similitude de 1 : 2.

Solution. 1° Décrivons la circonférence de centre O sur BC comme diamètre. Elle passe par les points B′ et C′ et l'on aura :

$$\text{arc } BB' : \text{arc } CC' = K.$$

Digitized by Google

Soit X sur cette circonférence le point pour lequel

$$\text{arc BX} : \text{arc CX} = K;$$

on aura aussi :

$$\text{arc XB}' : \text{arc XC}' = K.$$

D'après le lemme I, A'C' enveloppe une hypocycloïde; dans le cas particulier K = 2, B'C' enveloppe une *hypocycloïde de Steiner*.

2° Dans le quadrilatère inscriptible BA'HC', on a

$$\textit{angle}\ \text{A}'\text{C}'\text{B} = \text{BHA}' = \text{C}.$$

Si donc C'A' coupe la circonférence O en C'', on aura

$$\text{arc CC}' : \text{arc BC}'' = K.$$

Soit sur cette circonférence y un point tel que

$$\text{arc CC}'y : \text{arc BC}''y = K;$$

on aura aussi

$$\text{arc } y\text{C}' : \text{arc } y\text{C}'' = K;$$

donc le sens des vitesses étant ici le même, A'C' et de même A'B' enveloppent des épicycloïdes; pour K = 2, elles enveloppent *deux cardioïdes*.

3° Soient M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et ω le milieu de AH. On sait que Oω, diamètre du cercle des neuf points de ABC, est divisé en parties égales au point O_9 par HM. B'C', axe radical des circonférences O et (A'B'C') est perpendiculaire sur Oω et l'angle ωB'O est droit. On a donc :

$$\overline{\text{OB}'}^2 = \text{O}\alpha.\text{O}\omega = 2.\text{OO}_9.\text{O}\alpha \quad \text{d'où :} \quad \text{OO}_9.\text{O}\alpha = \frac{a^2}{8}.$$

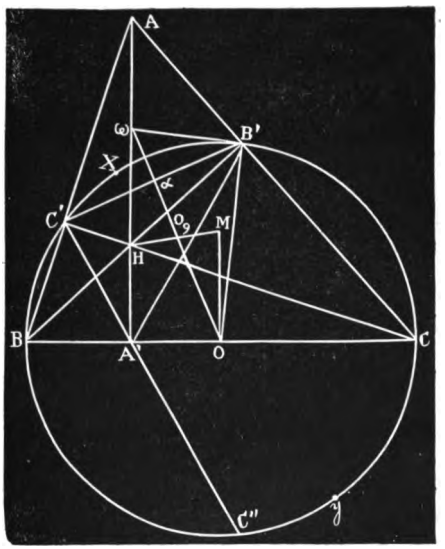
Il en résulte que B'C' est la polaire de O_9 pour le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Le centre O_9 décrit donc la polaire réciproque d'une hypocycloïde par rapport au cercle précité.

4° Le cercle des neuf points passe constamment par O et son centre décrit une courbe déterminée. D'après le lemme II, il enveloppera une podaire de la polaire réciproque d'une hypocycloïde.

Digitized by Google

5° Les lieux du sommet A et de l'orthocentre H se laissent aisément déterminer dans chaque cas particulier; on a, en effet, sin B = sin (KC).



Or, sin KC peut s'exprimer en fonction de sin C et de cos C. En choisissant BC comme axe des x et O comme origine, on a :

$$\sin B = \frac{y}{\sqrt{y^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}}, \qquad \sin C = \frac{y}{\sqrt{y^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}};$$

$$\cos C = \frac{\frac{a}{2}+x}{\sqrt{y^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}},$$

d'où l'équation du lieu (A).

On obtient l'équation du lieu de l'orthocentre en remplaçant, dans l'équation du lieu de A, y par $\frac{\frac{1}{4}a^2-x^2}{y}$.

Enfin le lieu du centre de gravité G est une courbe homothétique de celle décrite par A par rapport au centre O et réduite au 1/3.

Note. M. Barisien nous a adressé une solution analytique de la même question; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche

Digitized by Google

de l'insérer. Notre zélé correspondant examine les hypothèses $K = -2$, $K = -3$, et déduit de ses formules générales les conclusions suivantes :

1° $K = -2$. L'angle extérieur en B est égal à 2C, donc $AB = BC$. Le triangle variable ABC est constitué par un rayon fixe BC d'un cercle et un rayon variable BA du même cercle. La droite B'C' enveloppe une cardioïde, les droites A'B' et A'C' enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements, l'orthocentre décrit une strophoïde droite (Voir la question 1111, (2) VII, p. 102, posée par M. Droz-Farny).

2° $K = -3$. L'angle extérieur en $B = 3C$; B'C' enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements, les droites A'B' et A'C' enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements, A décrit une trisectrice de Maclaurin, enfin l'orthocentre décrit une quartique.

Question 1235.

(Voir *Mathesis* (2), t. IX, page 215).

Les extrémités d'une droite AB *de longueur variable décrivent deux droites données* Cx, Cy; *l'aire du triangle* CAB *restant constante, démontrer que :* 1° *le cercle circonscrit au triangle* ABC *enveloppe une podaire d'hyperbole;* 2° *l'axe orthique de* ABC *enveloppe une hyperbole;* 3° *le cercle des neuf points de* ABC *enveloppe une quartique. Si l'angle xCy est droit, le cercle circonscrit et le cercle des neuf points enveloppent des lemniscates de Bernoulli.* (Deprez)

Solution analytique par M. G. Cardoso-Laynes, à Livourne (Italie).

Prenant pour axes les bissectrices des angles des droites données, on aura pour les équations de ces droites :

$$y = mx; \qquad y = -mx$$

et pour les points A et B satisfaisant aux conditions de l'énoncé

$$A = (\lambda, \lambda m); \quad B = \left(\frac{k^2}{\lambda}, \frac{-k^2 m}{\lambda}\right),$$

où λ est un paramètre et k^2 une constante.

Le cercle circonscrit au triangle donné sera représenté par

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ \lambda^2(1+m^2) & \lambda & \lambda m \\ \frac{k^4}{\lambda^2}(1+m^2) & \frac{k^2}{\lambda} & \frac{-k^2 m}{\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire par

$$(1) \qquad f(x, y, \lambda) \equiv 2m\lambda(x^2+y^2) - mx(1+m^2)(k^2+\lambda^2) + y(1+m^2)(k^2-\lambda^2) = 0.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe de ce cercle en éliminant λ entre l'équation (1) et l'équation $\frac{df}{d\lambda} = 0$, qui donne

$$\lambda = \frac{m(x^2+y^2)}{(1+m^2)(mx+y)};$$

on aura donc

$$m^2(x^2+y^2)^2 = k^2(1+m^2)^2(m^2x^2-y^2),$$

équation de la *podaire du centre d'une hyperbole.*

Si les droites données sont rectangulaires, on a $m = 1$, et l'équation précédente devient

$$(x^2+y^2)^2 = 4k^2(x^2-y^2);$$

elle représente une *lemniscate de Bernoulli.*

Les coordonnées des milieux de CA, CB, AB sont

$$\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda m}{2}\right); \quad \left(\frac{k^2}{2\lambda}, \frac{-k^2m}{2\lambda}\right); \quad \left(\frac{\lambda^2+k^2}{2\lambda}, \frac{m(\lambda^2-k^2)}{2\lambda}\right);$$

par conséquent le cercle des neuf points a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ \frac{1}{4}\lambda^2(1+m^2) & \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}\lambda m & 1 \\ \frac{1}{4\lambda^2}k^4(1+m^2) & \frac{1}{2\lambda}k^2 & -\frac{1}{2\lambda}mk^2 & 1 \\ \frac{1}{4\lambda^2}[(\lambda^2+k^2)^2+m^2(\lambda^2-k^2)^2] & \frac{1}{2\lambda}(\lambda^2+k^2) & \frac{1}{2\lambda}m(\lambda^2-k^2) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \varphi(x, y, \lambda) \equiv 4m\lambda(x^2+y^2) + mx(k^2+\lambda^2)(m^2-3) + y(k^2-\lambda^2)(3m^2-1) + 2\lambda mk^2(m^2-1) = 0.$$

Mais de l'équation

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0,$$

Digitized by Google

on tire

$$\lambda = \frac{m[2(x^2+y^2)+k^2(m^2-1)]}{y(3m^2-1)-mx(m^2-3)};$$

l'équation de l'enveloppe du cercle (2) sera donc

$$m^2[2(x^2+y^2)+k^2(m^2-1)]^2+k^2[y^2(3m^2-1)^2-m^2x^2(m^2-3)^2]=0;$$

elle représente une *quartique*.

Si les droites données sont rectangulaires, l'équation précédente devient

$$(x^2+y^2)^2 = k^2(x^2-y^2);$$

elle représente une *lemniscate de Bernoulli*.

L'axe orthique étant l'axe radical des deux cercles (1), (2), a pour équation

$$(3)\quad \psi(x,y,\lambda) \equiv mx(k^2+\lambda^2)(1-3m^2)+y(k^2-\lambda^2)(3-m^2) - 2\lambda mk^2(m^2-1)=0;$$

puisque de l'équation

$$\frac{d\psi}{d\lambda}=0,$$

on tire

$$\lambda = \frac{mk^2(m^2-1)}{mx(1-3m^2)-y(3-m^2)},$$

on aura, pour l'enveloppe de l'axe orthique (3),

$$(4)\qquad m^2x^2(1-3m^2)^2-y^2(3-m^2)^2 = m^2k^2(m^2-1)^2,$$

ce qui représente une *hyperbole*.

Si les droites données sont perpendiculaires entre elles, on trouve

$$x^2-y^2=0.$$

Remarquons que la courbe (4) se décompose aussi pour $m=\pm\sqrt{3}$ ou $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire, en considérant les angles plus petits que $\frac{1}{2}\pi$, si les droites données font un angle de 60° ou de 30°.

Solution géométrique par M. A. Gob. Le cercle ABC passant par un point fixe C, son enveloppe est la podaire du point C par rapport à la courbe décrite par l'extrémité M du diamètre de ce cercle qui passe par C. Or MA et MB sont perpendiculaires sur Cx et Cy et l'on a $CA.CB = k^2$, k désignant une constante. Les droites MA et MB décrivent donc deux faisceaux homographiques et leur point d'intersection

Digitized by Google

M décrit une conique. Cette conique est une hyperbole (k) ayant pour asymptotes les perpendiculaires menées par C aux droites Cx et Cy; l'enveloppe du cercle ABC est la podaire de cette hyperbole par rapport au point C.

On pourrait aussi remarquer que le cercle ABC est le symétrique, par rapport à la bissectrice de l'angle C, de la courbe inverse de la droite AB par rapport à un cercle Δ de centre C et de rayon k. L'enveloppe du cercle ABC est donc l'inverse de l'hyperbole enveloppée par la droite AB; c'est donc aussi la podaire de la polaire réciproque de cette hyperbole par rapport au cercle Δ. Cette polaire réciproque n'est autre chose que l'hyperbole (k) trouvée plus haut.

Lorsque l'angle xCy est droit, l'hyperbole (k) est équilatère. Or la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate. L'enveloppe du cercle ABC est donc, dans ce cas, une lemniscate. Le cercle des neuf points est alors la ligne homothétique du cercle ABC par rapport au point C, le rapport d'homothétie étant 1 : 2; il enveloppe donc aussi une lemniscate.

Supposons que l'angle xCy soit quelconque. Les hauteurs BH et AH et les médiatrices OA′ et OB′ déterminent par leurs intersections un parallélogramme $H\alpha O\beta$. Le centre ω du cercle des neuf points, milieu de OH, est donc aussi le milieu de $\alpha\beta$. Mais les angles αCA, βCB sont égaux tous deux au complément de C; donc les points α et β glissent sur deux droites fixes; d'ailleurs le produit $C\alpha . C\beta$ est constant, car on a $C\alpha = \frac{1}{2} CA \operatorname{cosec} C$, $C\beta = \frac{1}{2} CB \operatorname{cosec} C$. Le point ω décrit donc une hyperbole, à laquelle $\alpha\beta$ est tangente. Le centre du cercle des neuf points décrit une conique et ce cercle est de puissance constante par rapport au point C; il enveloppe donc une anallagmatique du 4e ordre.

Soient P et Q les points de rencontre de l'axe orthique avec CA et BC. Les points P et Q sont les conjugués harmoniques des pieds B″ et A″ des hauteurs BB″ et AA″ par rapport aux segments CA et CB. On déduit de là les relations

$$\frac{1}{CP} = \frac{2}{CA} - \frac{1}{CB \cos C}, \quad \frac{1}{CQ} = \frac{2}{CB} - \frac{1}{CA \cos C}.$$

En éliminant CA et CB entre ces relations et l'égalité $CA . CB = k^2$, on trouve qu'il existe, entre les inverses des longueurs CP et CQ, une relation du 2e degré. La droite PQ enveloppe donc une conique. En

Digitized by Google

cherchant les positions limites de cette droite, on trouve que cette courbe est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites joignant le point C aux points qui divisent les hauteurs BB'' et AA'' dans le rapport 2 : 1.

On démontrerait de la même façon que les côtés du triangle orthique enveloppent des hyperboles.

M. Barisien a résolu la même question par des calculs très élégants; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de publier sa solution.

×Question 1941.

(Voir *Mathesis*) (2), IX, p. 240).

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

(J. Neuberg).

Solution par M^lle C. Wendt (Vienne, Autriche) et M. A. Listray. Aux éléments de la première colonne ajoutons les éléments correspondants de toutes les autres, puis soustrayons des éléments de chaque ligne les éléments correspondants de la ligne suivante; notre déterminant se réduit à

$$(-1)^{n-1}\tfrac{1}{2}n(n+1)\Delta',$$

où Δ' est le déterminant suivant d'ordre $n-1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$

Laissant la première ligne invariable, soustrayons des éléments de toutes

Digitized by Google

les autres les éléments correspondants de la première. Δ' se réduit à un déterminant d'ordre $n-2$ qui a tous ses éléments nuls à l'exception de ceux de la diagonale principale qui sont tous égaux à $-n$.

Ceci donnera donc pour la valeur du déterminant proposé :

$$(-1)^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} n^{n-1} (n+1).$$

Autre solution par M. Listray. Faisant usage d'une propriété connue des circulants, si D est le déterminant proposé, nous pourrons écrire :

$$D = (1+2+3 \cdots + n) \prod_{i=1}^{i=n-1} (1 + 2\omega_i + 3\omega_i^2 \cdots + n\omega_i^{n-1})$$

où $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega^{n-1}$ désignant les racines n^{es} de l'unité, abstraction faite de la racine 1 ; c'est-à-dire les racines de l'équation

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0, \qquad (1)$$

Or $$1 + 2\omega_i + 3\omega_i^2 \cdots + n\omega_i^{n-1} = \frac{n\omega_i^n}{\omega_i - 1} = \frac{n}{\omega_i - 1},$$

donc

$$D = \frac{n^n (n+1)}{2 \prod_{i=1}^{i=n-1} (\omega_i - 1)},$$

En développant le produit

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (\omega_i - 1)$$

et tenant compte des propriétés des racines appliquées à l'équation (1), on trouve

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (\omega_i - 1) = (-1)^{n-1} n$$

d'où enfin :

$$D = (-1)^{n-1} \tfrac{1}{2} n^{n-1} (n+1).$$

Solution analogue à la première par M. Emmerich.

×Question 1242.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 240).

Etant donné un trapèze ABCD *rectangle en* A *et en* D, *on joint les sommets* C, B *au milieu* M *de* AD, *et l'on abaisse de* D *une perpendiculaire à* CM, *de* A *une perpendiculaire à* BM; *soit* N *le point de concours de ces perpendiculaires. Démontrer que la droite* MN *est perpendiculaire à* BC.

(J. Neuberg.)

Digitized by Google

Solution par M. Emmerich. Soient E, F les points où les droites AN, DN rencontrent respectivement BM, CM. De

$$MA = MD, \quad \overline{MA}^2 = ME.MB, \quad \overline{MD}^2 = MF.MC$$

on conclut que les triangles MEF, MCB sont inversement semblables. MN étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle MEF, on voit que cette droite dans le triangle MBC joue le rôle de la conjuguée isogonale du diamètre, c'est-à-dire de la hauteur.

Solution par MM. Rose (Gand), Cox (athénée de Gand) et Vignory (collège communal de Bouillon).... Les triangles MEF, MCB étant semblables, l'angle MEF = MCB; mais à cause du quadrilatère inscriptible MENF, on a *angle* MEF = MNF = 90° — FMN. Les angles BCM, FMN étant complémentaires, MN est bien perpendiculaire à BC.

Solution par M. A. Droz-Farny. Représentons par X et Y les points à l'infini sur les droites AD et BC, par P le milieu de BC. Les deux faisceaux N (DMAX), M (CYBP) sont harmoniques. Or, les couples de rayons correspondants ND et MC, NA et MB, NX et MP sont orthogonaux; il en sera donc de même des rayons NM et MY ou NM et BC.

Solution par M. Plakhowo. Prenons pour axe de y la droite AD, pour axe des x la perpendiculaire en M. Des coordonnées des points A $(0, -a)$, D $(0, a)$, B $(d, -a)$, C (c, a), on déduit facilement les équations :

$$MD \cdots y = -\frac{a}{d}x, \quad MC \cdots y = +\frac{a}{c}x,$$

$$AN \cdots y + a = \frac{d}{a}x, \quad DN \cdots y - a = -\frac{c}{a}x.$$

En ajoutant les deux dernières, on obtient pour l'équation de MN

$$y = \frac{d-c}{2a}x;$$

or le coefficient angulaire de CB est $\frac{2a}{c-d}$, etc.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Orlando et Delahaye (Roye).

QUESTIONS D'EXAMEN.

988. Calculer les côtés d'un quadrilatère convexe circonscriptible à une circonférence, connaissant le périmètre et la somme des carrés des côtés. On sait que les diagonales sont rectangulaires.

Digitized by Google

Équations du problème

$$x+y+z+u=2p,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=4a^2,$$
$$x+z=y+u,\quad x^2+z^2=y^2+u^2,$$

Ce système peut être remplacé par

$$x+z=y+u=p,\quad x^2+z^2=y^2+u^2=2a^2$$

ou encore par

$$x+z=p,\quad xz=\frac{p^2-2a^2}{2},\quad y+u=p,\quad yu=\frac{p^2-2a^2}{2}.$$

On en conclut par exemple,

$$x=y=\tfrac{1}{2}(p+\sqrt{4a^2-2p^2}),\ u=z=\tfrac{1}{2}(p-\sqrt{4a^2-2p^2}).$$

939. Résoudre un triangle, connaissant r_a, r_b, r_c (*).

On a les relations

$$S=(p-a)\,r_a=(p-b)\,r_b=(p-c)\,r_c=pr,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c},\quad S=\sqrt{rr_a\,r_b\,r_c}.$$

On connaît donc S, r et p. Les côtés a, b, c résultent alors de

$$a=p-\frac{S}{r_a},\quad b=p-\frac{S}{r_b},\quad c=p-\frac{S}{r_c}.$$

Les angles résultent de

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad r_b=p\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad r_c=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

940. Résoudre un triangle, connaissant r, r_a, r_b.

941. Résoudre un triangle connaissant R, r, r_a.

Soient D, E, F, D_a, E_a, F_a, ... les points de contact des côtés avec les cercles I, I_a, I_b, I_c. Comme $EE_a=a$, on trouve facilement en menant par I une parallèle à AC jusqu'à la rencontre avec $I_a E_a$

$$r_a-=z\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=4R\sin^2\frac{A}{2},$$

d'où l'angle A, et le côté $a=2R\sin A$. B et C peuvent se déduire de

$$B+C=\pi-A,\quad a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

(*) Les questions 939-943 nous ont été communiquées par M. Rose. Quoiqu'elles soient connues, nous les insérons volontiers à titre d'exercices utiles.

Digitized by Google

En menant par I_a à une parallèle à BC jusqu'à la rencontre avec ID, on trouve facilement

$$r + r_a = (b - c)\cot\frac{1}{2}(B - C) = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{1}{2}(B - C)$$

formule qui détermine directement B — C en fonction des données.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1265. Si A et B sont deux points et M leur milieu, le lieu des points P tels que l'on ait PM = PA — PB est une quartique bicirculaire unicursale. Les tangentes au point double réel font un angle de 60°.

(Cardoso-Laynes.)

1266. Soient M et M′ les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de centre O, N et T les points de rencontre de la normale et de la tangente en M avec le grand axe, P′ et Q′ les projections de M′ sur le grand axe et sur le petit axe, R et R′ les rayons des cercles circonscrits aux triangles MOT et MON. Démontrer les relations

$$R = \frac{OM + OM'}{2M'P'}, \quad R' = \frac{OM + OM'}{2M'Q'}.$$

(E. N. Barisien.)

1267. Sur une circonférence on donne deux points fixes A et C. On considère tous les quadrilatères inscrits ABCD ayant A et C comme sommets opposés et qui soient en même temps circonscrits à une seconde circonférence dont on demande le lieu géométrique du centre.

(Droz Farny.)

×**1268.** Un triangle scalène ABC tourne successivement autour de la bissectrice extérieure de chacun de ses angles. Comparer les trois volumes engendrés, ainsi que leurs trois surfaces.

Même question en prenant pour axe de révolution la tangente menée par l'un des sommets au cercle circonscrit. (J. Neuberg.)

Rectifications. P. 62, l. 3, lire ζ au lieu de ξ. — P. 78, dernière ligne, nous avons oublié de mentionner une bonne solution de la question 1236.

Digitized by Google

SUR LE POINT DE FAGNANO;

par M. ANDRIEN, professeur à Charleroi (*).

Soient A, B, A′, B′, O, F, F′ les sommets, le centre et les foyers de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Nous appelons *points associés* deux points M (x, y), M′ (x', y') appartenant au même quadrant de l'ellipse, par exemple au premier AB, et tels que les normales issues de ces points soient équidistantes du centre O. Ces points, d'après un théorème de Fagnano, divisent l'arc AB en trois parties dont les extrêmes ont une différence égale à la distance de O à la normale menée en M ou en M′. Ils peuvent coïncider en un seul point m, qui prend le nom de *point de Fagnano;* la différence des arcs Am, Bm est égale à la distance de O à la normale issue de m.

Nous allons étudier quelques propriétés élémentaires des points associés et du point de Fagnano; les élèves y trouveront des exercices intéressants.

Le lecteur est prié de faire la figure avec les notations suivantes :

Les axes OA, OB sont rencontrés par la tangente menée en M aux points T, S et par la normale aux points N, P; le centre O se projette sur TS en D, sur NP en E; Q est une extrémité de diamètre parallèle à TS (ou conjugué avec OM); enfin I, J sont les points de la normale NP tels que MI = MJ = OQ. Les mêmes lettres accentuées seront employées au point M′, et les lettres minuscules au point m.

1. En partant des équations de la tangente et de la normale

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1, \quad \frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y}=c^2,$$

(*) Dans les *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen* éditées par les Drs O. Böklen et E. Wölffling (octobre 1899), M. Böklen a publié un premier article *Sur le théorème de Fagnano* et un second *Sur les cercles de Chasles*. Ce dernier commente quelques propositions de MM. Barisien et Droz Farny (*Mathesis*, 1895, 1896 et 1898) et en donne une extension à l'ellipsoïde. Nous avons profité de ces articles pour retoucher légèrement le travail de M. Andrien, qui nous a été remis avant réception de la livraison d'octobre de la revue allemande. (J.N.)

Digitized by Google

on trouve aisément

$$\frac{1}{\overline{OD}^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4},\quad \frac{c^4}{\overline{OE}^2}=\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}.$$

L'égalité OE = OE′ ou MD = M′D′ donne

$$\frac{a^4(x^2-x'^2)}{x^2x'^2}+\frac{b^4(y^2-y'^2)}{y^2y'^2}=0. \tag{3}$$

Si, dans la différence $y^2-y'^2$, on introduit les valeurs

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\quad y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2), \tag{4}$$

on obtient la relation remarquable

$$\frac{xx'}{a^2}=\frac{yy'}{b^2},\quad \text{ou}\quad \frac{y}{x}\cdot\frac{y'}{x'}=\frac{b^2}{a^2}. \tag{5}$$

Donc *le produit des coefficients angulaires des diamètres aboutissant à deux points associés est constant;* autrement dit, *les diamètres* OM, OM′ *se correspondent dans une involution dont* Om *est un rayon double.*

Si l'on désigne par α, α' les angles aigus que font les tangentes MT, M′T′ avec l'axe OA, on a

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b^2x}{a^2y},\quad \operatorname{tg}\alpha'=\frac{b^2x'}{a^2y'};$$

d'où, en tenant compte de l'égalité (5),

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=\frac{b}{a}. \tag{5'}$$

Appelons y_1, y_1' les ordonnées du cercle principal qui correspondent aux abscisses x, x'; on pourra écrire

$$\frac{y_1y_1}{xx'}=\frac{b}{a},\quad \text{ou}\quad \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\beta'=\frac{b}{a}, \tag{5''}$$

si β, β' désignent les angles de OA avec les rayons des points correspondants des cercles. La relation (5″) se prête facilement à une détermination des points M, M′.

De l'équation (5) on déduit, pour le point de Fagnano,

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2b^2+a^2b^2}=\frac{1}{a+b},$$

Digitized by Google

de sorte que les coordonnées de m sont

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

2. Portons les valeurs (4) dans la relation (5); il vient

$$a^2(a^2 - x^2)(a^2 - x'^2) = b^2x^2x'^2,$$

ou

$$c^2x^2x'^2 - a^4(x^2 + x'^2) + a^6 = 0. \tag{6}$$

et, par analogie,

$$c^2y^2y'^2 + b^4(y^2 + y'^2) - b^6 = 0. \tag{7}$$

L'égalité (6) peut prendre la forme

$$\left(a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}\right)\left(a^2 - \frac{c^2x'^2}{a^2}\right) = a^2b^2; \tag{8}$$

celle-ci exprime que *le produit des rayons vecteurs de deux points associés quelconques est constant.*

Si l'on fait $x' = x$, $y' = y$, les équations (6) et (7) donnent pour le point m

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a \pm b}}, \quad y = b\sqrt{\frac{b}{b \pm a}};$$

mais il faut rejeter les dénominateurs $a - b$, $b - a$, qui donnent pour x une valeur plus grande que a, et pour y une valeur imaginaire.

3. On a

$$a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2};$$

par suite, la formule (8) peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right) = \frac{1}{a^2b^2}. \tag{9}$$

Il en résulte

$$OD.\,OD' = ab.$$

D'après un théorème d'Apollonius,

$$OQ.\,OD = OQ'.\,OD' = ab;$$

donc, on a aussi

$$OQ.\,OQ' = ab.$$

Digitized by Google

Enfin, les rayons de courbure ρ, ρ' aux points M, M' ont pour expression

$$\rho = \frac{\overline{OQ}^2}{OD}, \quad \rho' = \frac{\overline{OQ'}^2}{OD'};$$

ces égalités combinées avec les précédentes donnent $\rho\rho' = ab$.

Voici d'autres relations du même genre empruntées à M. Böklen :

$$MN \cdot M'N' = \frac{b^2}{a}, \quad MP \cdot M'P' = \frac{a^2}{b};$$

$$MT \cdot M'T' = b^2, \quad MS \cdot M'S' = a^2,$$
$$DT \cdot D'T' = a^2, \quad DS \cdot D'S' = b^2.$$

4. Dans les relations précédentes, faisons coïncider deux points associés M, M' avec le point de Fagnano; nous aurons les égalités suivantes

$$Oq = Od = \rho = \sqrt{ab} = \sqrt{mF \cdot mF'},$$

$$mn = \sqrt{\frac{b^3}{a}}, \quad mp = \sqrt{\frac{a^3}{b}}, \quad mt = ds = b, \quad ms = dt = a.$$

On voit que le cercle osculateur au point de Fagnano est équivalent à l'ellipse et a pour centre la projection de O sur la normale.

5. Lorsqu'un point parcourt le quadrant d'ellipse AB, la distance de la normale en ce point au centre part de la valeur 0 pour revenir à la valeur 0, et elle passe par la même valeur en deux points associés; par suite elle passe par un maximum au point de Fagnano. Un calcul très simple conduit à la même conclusion. Car en multipliant membre à membre les égalités

$$\frac{c^4}{\overline{OE}^2} = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}, \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

on trouve

$$\frac{c^4}{\overline{OE}^2} = a^2 + b^2 + \frac{a^4y^2}{b^4x^2} + \frac{b^4x^2}{a^2y^2},$$

et comme les deux derniers termes ont un produit constant a^2b^2, le minimum de leur somme et, par suite, le maximum de OE ont lieu quand ces termes sont égaux à ab. On retrouve ainsi l'égalité (5); ensuite

$$\frac{c^4}{\overline{Oe}^2} = a^2 + b^2 + 2ab, \quad Oe = md = a - b.$$

Digitized by Google

6. Des valeurs $OT = \frac{a^2}{x}$, $OS = \frac{b^2}{y}$, on conclut

$$\overline{TS}^2 = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = \frac{c^4}{\overline{OE}^2}.$$

Par conséquent, en deux points associés on a $TS = T'S'$, et un minimum de TS, égal à $a + b$, se produit au point de Fagnano.

Comme on a $mt = b$, $ms = a$, on voit que si la droite st glisse entre les axes OA, OB, le point m, supposé fixe sur cette droite engendre l'ellipse ABA'B', et que le point de Fagnano correspond à la position où la droite devient tangente à l'ellipse.

On sait que la normale à la courbe passe par le quatrième sommet j du rectangle construit sur les côtés Os, Ot; donc, au point de Fagnano, mj est perpendiculaire à st.

L'enveloppe de la droite mobile st est une hypocycloïde dont le point de contact est la projection de j sur st; ce point est donc le point de Fagnano de l'ellipse qu'il engendrerait s'il restait fixe sur st.

Enfin, si l'on demande de mener par un point donné m une droite dont le segment st intercepté entre deux axes rectangulaires OA, OB soit un minimum, la droite cherchée est la tangente au point m de l'ellipse dont les axes sont parallèles à OA, OB et dont m est le point de Fagnano. Pour le démontrer géométriquement, nous reproduisons un raisonnement bien connu. Si st, $s't'$ désignent deux droites de même longueur menées par m, les perpendiculaires élevées aux milieux des droites ss', tt' se rencontrent en un point K tel que les deux triangles Kst, $Ks't'$ sont égaux, et Km est sur la bissectrice de l'angle smt'. Les deux droites st, $s't'$ peuvent se rapprocher indéfiniment l'une de l'autre et ont pour limite commune la droite minimum menée par m; on en conclut que les perpendiculaires élevées en s sur OA, en t sur OB et en m sur st doivent concourir en un même point.

De ce qui précède, on déduit les théorèmes suivants :

Si l'on considère toutes les ellipses pour lesquelles $a - b$ est constant, le lieu du centre de courbure au point de Fagnano est le cercle de Chasles de rayon $a - b$.

Si l'on considère toutes les ellipses de même surface, la tangente au point de Fagnano enveloppe une circonférence de centre O *et de rayon* $\sqrt{ab}$.

Digitized by Google

SUR LA DÉVELOPPANTE DE CERCLE ET LA SPIRALE LOGARITHMIQUE;

par M. Lucien Orlando, à Turin.

I.

I. Considérons une développante de cercle ABB', engendrée par l'extrémité A d'un fil primitivement enroulé sur la circonférence AKI et qu'on déroule ensuite. A un certain moment, le fil se détache suivant la tangente CB égale à l'arc CA. On sait que CB est le rayon de courbure de la développante; la tangente BH est donc perpendiculaire à CB.

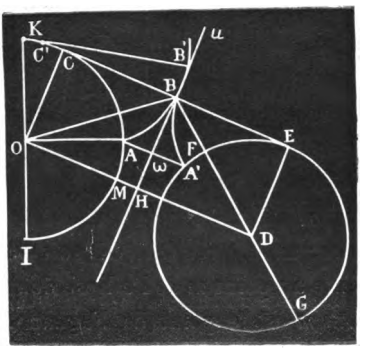


Fig. 1.

Nous prenons le rayon OA pour unité et nous désignons l'arc AC par θ; alors CB $= \theta$ (Fig. 1).

La podaire de O *par rapport à la développante* ABB' *est une spirale d'Archimède* (*). En effet, si l'on projette O en H sur la tangente B*u* et qu'on mène le diamètre KI perpendiculaire à OA, on a OH = arc AC = arc IM, de sorte que l'équation du lieu (H) par rapport à l'axe polaire OI est $r = \theta$.

II. Faisons rouler sur la développante de cercle AB une autre développante A'B égale à la première, les points de rebroussement étant en coïncidence à l'origine du mouvement. Si les deux courbes se touchent actuellement en B, la position correspondante du cercle directeur de la courbe mobile est le cercle D symétrique du cercle O par rapport à la tangente commune B*u*.

Il résulte de ce qui précède que *le centre* D *engendre une spirale d'Archimède*, ayant pour équation $r = 2\theta$, si l'axe polaire est OI.

La normale à la courbe (D) est DB. Le cercle D enveloppe une courbe parallèle à la spirale d'Archimède; ses points de contact avec l'enveloppe sont les extrémités F, G du diamètre DB.

(*) Ce théorème, d'après le *Répertoire* de M. Brocard, t II, p. 167, est attribué à Clairaut (Mém. de l'Ac. des Sciences, 1740).

Digitized by Google

III. Cherchons l'arc AB $= s$ de la développante. Si l'on donne à θ l'accroissement infiniment petit $d\theta = CC'$, s éprouve l'accroissement $ds = BB' = CB d\theta = \theta d\theta$; donc $s = \frac{1}{2}\theta^2$.

Cela posé, faisons rouler la courbe AB sur une droite ωu. Soit ω la position du point de rebroussement A quand il se trouve sur la base ωu; nous aurons $\omega B = AB = \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}\overline{BC}^2$. Par conséquent, *quand une développante roule sur une droite, le centre de courbure au point de contact des deux lignes décrit une parabole*(*); car ωB, BC sont les coordonnées rectangulaires de B.

Le centre O décrit également une parabole; celle-ci a pour équation $y^2 = 2x - 1$.

II.

I. Considérons une spirale logarithmique AB, de pôle O (fig. 2). Menons la tangente BH au point B et la perpendiculaire OC au rayon

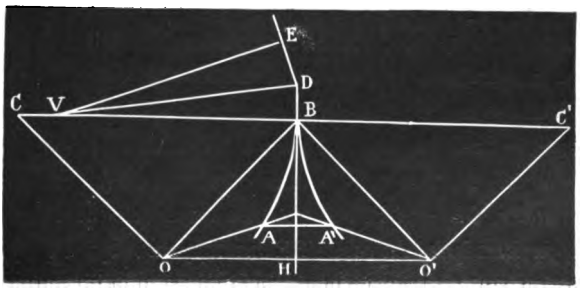


Fig. 2.

vecteur, qui rencontre la normale au centre de courbure C. Soit H la projection de O sur la tangente.

La podaire du pôle d'une spirale logarithmique est une seconde spirale logarithmique. En effet, l'angle OBH étant constant, le triangle OHB est toujours semblable à lui-même. Donc si U désigne OBH, on passe de la spirale AB à la podaire (H) en faisant tourner la spirale de l'angle U et en modifiant ses rayons vecteurs dans le rapport sin U : 1.

(*) Cette propriété est la traduction géométrique de l'équation intrinsèque de la développante $\rho^2 = 2s$, ρ étant le rayon de courbure à l'extrémité de l'arc s (Voir E. Cesàro, *Lezioni di Geometrica intrinseca*). Elle a déjà été signalée.

Digitized by Google

II. Faisons rouler sur la spirale AB une spirale égale A'B de manière que des points correspondants viennent toujours en coïncidence. Si B est le point de contact actuel des deux courbes, le pôle O' de la spirale mobile est le symétrique de O par rapport à la tangente commune HB; ce point décrit une spirale logarithmique, car le milieu H de OO' décrit une telle courbe.

Le centre de courbure C' de la ligne roulante s'obtient en prolongeant le rayon de courbure CB de la ligne fixe d'une quantité égale. Le triangle OBC' restant toujours semblable à lui-même (l'angle OBC' et le rapport BO : OC' sont invariables), le point C' décrit une spirale logarithmique.

III. Faisons rouler un angle constant BDE sur la spirale logarithmique. L'angle BOC restant constant, le rapport OE : OD est invariable; par suite le quadrilatère OBDE est toujours semblable à lui-même, et il en est de même du triangle BOD. Il résulte de là *que le sommet d'un angle constant circonscrit à une spirale logarithmique décrit également une spirale logarithmique.*

IV. Soit V le point de rencontre des normales en B et E; c'est le centre instantané de rotation de l'angle mobile BDE. VD est donc la normale à la spirale (D'). Les angles OED, OBH étant égaux, le quadrilatère OEDB est inscriptible; VD étant un diamètre de la circonférence circonscrite, celle-ci touche la spirale (D). Ainsi, *la circonférence qui passe par le pôle* O *d'une spirale et par les extrémités de deux rayons vecteurs variables*, OB *et* OE, *qui font un angle constant, est tangente à la spirale logarithmique. La corde* BE *enveloppe une spirale logarithmique*; c'est ce qu'on voit en transformant par inversion la circonférence OBDE.

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE

F. Brioschi (1824-1897).

François Brioschi, né à Milan, le 22 décembre 1824, mort dans cette ville, le 13 décembre 1897, était le plus éminent des géomètres de l'Italie. Pendant plus de quarante ans, ses travaux se sont succédé sans interruption, embrassant les diverses branches des mathématiques pures et appliquées.

A ses débuts, il publie dans les *Annales* de Tortolini, des recherches sur le problème des trois corps, la variation des constantes arbitraires en Mécanique, l'hydrodynamique, etc. Il devient ensuite directeur des *Annali di matematica* qui continuent le journal de Tortolini et publie là ou ailleurs une foule de travaux sur

Digitized by Google

les sujets les plus variés : théorie des lignes de courbure, surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, lignes géodésiques, tangentes doubles des courbes du quatrième ordre ayant un point double; équations aux dérivées partielles du 1er et du 2d ordre; déterminants gauches, déterminants de la transformation des fonctions abéliennes, interpolation, fonctions de Sturm; théorie générale des formes algébriques, où il se montre le digne collaborateur de Sylvester et de Cayley.

Mais il faut citer surtout cette partie importante des recherches de Brioschi « où l'Algèbre se joint à la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, et qui conduisent à la résolution des équations du cinquième et du sixième degré. Son talent s'y montre avec éclat, il jette une complète lumière sur les propriétés cachées de l'équation de Jacobi qui determine le multiplicateur au moyen du module dans la transformation du cinquième ordre; il donne le secret de la résolution de l'équation du cinquième degré qu'en a tirée Kronecker, et que l'illustre géomètre avait communiquée à notre Académie, sans démontrer son beau résultat.

« Pour l'équation du sixième degré, la voie suivie est tout autre. On sort du domaine des fonctions elliptiques et il est fait appel aux transcendantes plus élevées qui naissent de l'inversion des intégrales hyperelliptiques de première classe. On emploie les fonctions de deux variables analogues à la transcendante *théta* de Jacobi, et parmi elles les dix expressions qui, étant des fonctions paires, ne s'évanouissent pas pour les valeurs nulles des arguments. Ce sont les quantités au moyen desquelles sont représentées les racines et qui donnent la résolution de l'équation du sixième degré, grande et belle découverte qui a été le couronnement de la carrière mathématique de Brioschi. »

Brioschi appartenait à la plupart des Académies et Sociétés savantes de l'Europe et de l'Amérique; il a été comblé d'honneurs et de dignités dans son pays; les plus hautes distinctions, les grandes situations qu'il a occupées l'ont toujours laissé simple et modeste (D'après HERMITE, *Notice sur F. Brioschi*, C. R., CXXV, pp. 1139-1141; 27 décembre 1897).

SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE;

par M. E. BARISIEN.

(*Suite*; voir *Mathesis*, (2), X, p. 84).

65. Lieu de la projection de O sur la parallèle à B'''C''' menée par A''' :

$$R^2(x'+y^2)^2\,(a^2x^2+b^2y^2)=(a^2x^2+b^2y^2)^2;$$

$$U=\frac{\pi}{2a^2b^2}(a^2+b^2)\,(a^2+b^2+ab)^2-2\pi\,(a^2+b^2)-\pi ab.$$

Digitized by Google

66. Les bissectrices extérieures du triangle ABC enveloppent l'antipodaire du centre de l'ellipse (courbe de Talbot), dont l'aire est

$$U = \pi ab - \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

67. La perpendiculaire au milieu de BC et la perpendiculaire au milieu de B'''C''' se coupent sur la courbe

$$\begin{aligned}&\{\, a^2x^2\,[(a+b)(a^2+b^2)+a^2b]^2+b^2y^2\,[(a+b)(a^2+b^2)+ab^2]^2\,\}^2\\&=[(a+b)(a^2+b^2)+ab^2]^2\,[(a+b)(a^2+b^2)+a^2b]^2\\&\{\,[(a+b)(a^2+b^2)+ab^2]^2y^2+[(a+b)(a^2+b^2)+a^2b]^2x^2\,\}\end{aligned}$$

68. Lieu de la projection de O sur la perpendiculaire au milieu de BC:

$$(x^2+y^2)^2\,(b^2x^2+a^2y^2)^2 = c^4R^2x^2y^2;\quad U = \pi ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

69. Lieu de la projection de O sur la perpendiculaire au milieu de B'''C''' :

$$(x^2+y^2)^2\,(b^4x^2+a^4y^2)^2 = (a^4-b^4)^2\,x^2y^2\,(b^2x^2+a^2y^2).$$

70. Lieu du point de rencontre de la perpendiculaire au milieu de BC, avec la droite OA :

$$(x^2+y^2)^2 = a^2y^2+b^2x^2.$$

71. La perpendiculaire à B'''C''' au milieu de B'''C''' coupe la droite OA' sur la quartique

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=(a^2+b^2)^2\,(a+b)^2\,(x^2+y^2);\quad U=\frac{\pi\,(a^2+b^2)^5\,(a+b)^2}{2a^3b^5}.$$

72. Lieu du point de rencontre de la perpendiculaire au milieu de B'''C''' avec la droite OA :

$$(x^2+y^2)^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}\,(b^2x^2+a^2y^2);\quad U=\pi\frac{(a^2+b^2)^5}{2a^2b^2}.$$

Cette courbe est la podaire du centre de l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

73. Lieu de la projection de O sur la droite qui unit les milieux de BC et B'''C''' :

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^2[a^4(2b+a)^2x^2+b^4\,(2a+b)^2\,y^2]^2\\&=a^2b^2\,(a-b)^2\,x^2y^2\,[a^6\,(2b+a)^2\,x^2+b^6\,(2a+b)^2y^2]\,.\end{aligned}$$

Digitized by Google

74. Lieu du point de rencontre de OA avec la droite qui unit le milieu de BC au milieu de B'''C''' :

$$(x^2+y^2)^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2+3ab)^2}(b^2x^2+a^2y^2),$$

podaire du centre d'une ellipse.

75. Lieu du point de recontre de OA' avec la droite qui unit les milieux de BC et B'''C''' :

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=R^6(x^2+y^2);\quad U=\frac{\pi a^2b^2(a^2+b^2)}{2(a+b)^6}.$$

76. Le lieu du point de recontre des droites AA''', BB''', CC''' est une courbe unicursale du genre des courbes (58).

$$U=\frac{3\pi ab(a-b)^2}{(2a+b)(2b+a)}.$$

77. Lieu des milieux des côtés du triangle A'''B'''C''' :

$$(b^4x^2+a^4y^2)^2=a^2b^2(b^6x^2+a^6y^2);\quad U=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

78. Lieu des milieux des côtés du triangle A'''B'''C''' :

$$U=\pi ab-\frac{3\pi(a^2+b^2)}{8}.$$

79. Lieu du centre de gravité de A'''B'''C''' : $U=\frac{\pi}{3}(a-b)^2$.

80. L'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle des neuf points, les pieds et les milieux des hauteurs du triangle A'''B'''C''' décrivent des courbes du genre des courbes (58).

81. La perpendiculaire abaissée de A' sur la tangente en A à E est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2b^2}{(a+b)^4}.$$

82. La projection de A' sur la tangente en A ou en α à E décrit une courbe du genre de la courbe (58).

83. Les droites A'A''', A''A''', αA''' enveloppent chacune une développée d'ellipse.

84. Lieu du point de rencontre de AA''' et OA' :

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2+3ab)^2}.$$

Digitized by Google

85. Les points des concours des droites

$$(A'A''', B'B''', C'C'''), (A''A''', B''B''', C''C'''), (\alpha A', \beta B', \gamma C'),$$
$$(\alpha A'', \beta B'', \gamma C''), (\alpha A''', \beta B''', \gamma C''')$$

décrivent des courbes analogues à la courbe (58).

86. Le lieu du point de rencontre de OA′ avec la normale en A à E est le cercle $x^2 + y^2 = (a+b)^2$. On retrouve ainsi une propriété de l'un des cercles de Chasles, étudiée dans *Mathesis* (2), V, p. 129.

87. Le lieu du point de rencontre des normales à E, aux points A, B, C est l'ellipse

$$a^4x^2 + b^4y^2 = a^2b^2(a-b)^2.$$

88. L'enveloppe des droites AD′, BD′, CD′ est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4} = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2(a-b)^2}.$$

89. Lieu de la projection de O sur les droites AD′, BD′, CD′ :

$$(x^2+y^2)^2(a^4x^2 + b^4y^2) = a^2b^2(a+b)^2x^2y^2;\ U = \frac{\pi a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

90. Lieu des milieux des cordes AD′, BD′, CD′ :

$$(x^2+y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^2b^2(a+b)^2x^2y^2,\quad U = \tfrac{1}{2}\pi ab.$$

91. Lieu du pôle de AD′ par rapport à E_4.

$$\text{Kreuzcurve :}\quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2}.$$

92. Lieu du pôle de AD′ par rapport à Σ.

$$\text{Kreuzcurve :}\quad \frac{b^4}{x^2} + \frac{a^4}{y^2} = \frac{(a+b)^6}{a^2b^2}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 387 (*2e partie*).

(Voir *Mathesis*, (1), t. IV, p. 231 et (2), t. I, p. 29).

Si v_p est le coefficient de x^{2n} dans le développement de

$$u_p = \frac{\sin 2nx \,.\, \sin(2n-1)x \,\ldots\, \sin(2n-p+1)x}{\sin x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 3x \,\ldots\, \sin px},$$

on a

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots = -1.9.25\ldots(2n-1)^2.$$

(E. Cesàro.)

Digitized by Google

Solution par M. Emmerich. Dans son article « Source d'identités » (*Mathesis*, VI, p. 126), M. Cesàro propose la formule

$$1 - u_1 + u_2 - u_5 + \cdots = 2^n (1 - \cos x)(1 - 3x) \ldots (1 - \cos(2n-1)x), \quad (1)$$

qui conduit immédiatement au théorème en question. Pour démontrer la relation (1), posons

$$\sin px = \frac{1}{2^i} e^{pxi}(1 - e^{-2pxi}) = \frac{1}{2^i} q^{-\frac{1}{2}p}(1 - q^p).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de u_p, nous avons

$$u_p = q^{-\frac{1}{2}p(2n-p)} \cdot \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}) \ldots (1-q^{2n-p+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)} = q^{-\frac{1}{2}p(2n-p)} \cdot \lambda_{2n,p}.$$

Or, d'après un théorème de l'article cité (p. 127), on a l'identité

$$1 - \lambda_{2n,1} qz + \lambda_{2n,2} q^5 z^2 - \cdots + \lambda_{2n,2n} q^{n(2n+1)} z^{2n} = (1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^{2n}z).$$

Si nous posons $z = q^{-n-\frac{1}{2}}$, le terme général du premier membre deviendra

$$(-1)^p \lambda_{2n,p} q^{\frac{1}{2}p(p+1)} z^p = (-1)^p \cdot u_p \cdot q^{np-\frac{1}{2}p^2} \cdot q^{-np-\frac{1}{2}p} \cdot q^{\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p} = (-1)^p \cdot u_p.$$

Le produit du second membre pourra s'écrire

$$\prod_1^n (1 - q^{n-p+1}z)(1 - q^{n+p}z) = \prod_1^n (1 - q^{-p+\frac{1}{2}})(1 - q^{p-\frac{1}{2}})$$

$$= \Pi (2 - e^{xi(2p-1)} - e^{-xi(2p-1)}) = \prod_1^n 2[1 - \cos(2p-1)x].$$

La relation (1), ainsi démontrée, prouve que $-v_1 + v_2 - v_5 + \cdots + v_{2n}$ équivaut au coefficient de x^{2n} dans le développement de

$$P = 2^n (1 - \cos x)(1 - \cos 3x) \cdots [1 - \cos(2n-1)x].$$

Or, $\cos px = 1 - \frac{1}{2} p^2 x^2 + w_p x^5$, où w_p désigne une série convergente de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ Ainsi on trouve

$$P = 2^n (\tfrac{1}{2} x^2 - w_1 x^5)[\tfrac{1}{2} \cdot 9x^2 - w_5 x^5) \cdots (\tfrac{1}{2} \cdot (2n-1)^2 x^2 - w_{2n-1} x^5],$$

et l'on voit que le coefficient de x^{2n} dans le produit développé sera

$$1 \cdot 9 \cdot 25 \ldots (2n-1)^2.$$

Digitized by Google

Question 1096.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, page 280).

Soient A, B, C, D *les pieds des normales menées d'un point* P *à une ellipse. Si les cordes* AB, CD *sont parallèles,* 1° *le lieu du point* P *se compose de deux droites*; 2° *ces centres des circonférences* PAB, PCD *décrivent une hyperbole*; 3° *ces circonférences passent par un point fixe.* (Déprez.)

Solution par M. Barisien. Soient (X,Y) les coordonnées de P, (α, β), et $(m\alpha, m\beta)$ celles des pôles Q, Q' des cordes parallèles AB, CD. L'hyperbole d'Apollonius relative au point P peut se représenter par l'une et l'autre des équations

$$c^2xy + b^2x\mathrm{Y} - a^2y\,\mathrm{X} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\mathrm{K}\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{m\alpha x}{a^2}+\frac{m\beta y}{b^2}-1\right)=0.$$

En identifiant, on obtient les relations

$$m\alpha^2 = -a^2, \quad m\beta^2 = -b^2, \quad \mathrm{K}=1, \tag{1}$$

$$\frac{2m\alpha\beta}{c^2} = \frac{\alpha(1+m)}{-\mathrm{Y}} = \frac{\beta(1+m)}{\mathrm{X}}. \tag{2}$$

1° Les deux premières donnent $\frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{b}{a}$; donc les points Q, Q' ont pour lieu géométrique les diagonales d, d' du rectangle des axes, et les cordes AB, CD sont parallèles à d' ou à d.

On voit aussi que $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = -\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{b}{a}$; il en résulte que le lieu de P se compose des diamètres perpendiculaires à d' et à d.

2° A cause des angles droits PAQ, PBQ, le centre de la circonférence PAB est au milieu de la droite PQ; il a donc pour coordonnées

$$x = \frac{\alpha+\mathrm{X}}{2}, \quad y = \frac{\beta+\mathrm{Y}}{2}.$$

Les équations (2) donnent

$$\mathrm{Y} = -\frac{c^2(1+m)}{2m\beta}, \quad \mathrm{X} = \frac{c^2(1+m)}{2m\alpha};$$

par suite,

$$2x = \alpha + \frac{c^2(1+m)}{2m\alpha}, \quad 2y = \beta - \frac{c^2(1+m)}{2m\beta}.$$

Digitized by Google

En vertu des équations (1), on peut remplacer α, β par $a\mu$, $\pm b\mu$, μ^2 étant écrit au lieu de $-\frac{1}{m}$; alors

$$2x = a\mu - \frac{c^2(\mu^2-1)}{2a\mu}, \quad \pm 2y = b\mu + \frac{c^2(\mu^2-1)}{2b\mu}.$$

Il reste à éliminer μ entre ces deux équations. Or, on peut écrire

$$4a\mu x = (a^2+b^2)\mu^2 + c^2, \quad \pm 4b\mu y = (a^2+b^2)\mu^2 - c^2;$$

et en combinant par addition et par soustraction,

$$2(ax \pm by) = (a^2+b^2)\mu, \quad 2(ax \mp by)\mu = c^2;$$

d'où enfin par multiplication,

$$4(a^2x^2 - b^2y^2) = a^4 - b^4.$$

3° La circonférence QAB a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+K\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}-p\right)=0.$$

En exprimant que cette équation est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, on trouve $1+Kp=0$, ce qui est aussi la condition pour que la circonférence passe par le centre de l'ellipse.

Remarques. 1. Le cercle PAB enveloppe la quartique

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2 = (a^4-b^4)(b^2x^2-a^2y^2),$$

podaire du centre de l'hyperbole

$$a^2x^2 - b^2y^2 = a^4 - b^4.$$

2. Le centre de gravité du triangle PAB se meut sur deux hyperboles, l'orthocentre sur les diagonales des rectangles des axes, le centre du cercle des neuf points sur deux hyperboles.

3. Le lieu de l'orthocentre du triangle QAB est une hyperbole, celui du centre du cercle des neuf points se compose de deux hyperboles.

4. Les quatre droites AC, BD, AD, BC enveloppent une hyperbole équilatère.

M. Sintzof (Kazan) a résolu la même question.

Digitized by Google

Question 1214 ou 1284.

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 80 et 215).

Une sphère et un cylindre de révolution dont le cercle de base a pour diamètre un rayon de la sphère se rencontrent suivant une courbe gauche (fenêtre de Viviani). Trouver le lieu de la trace de la tangente à cette courbe sur le plan de base du cylindre. (ANDRIEN.)

Solutions par M. V. RETALI. Les équations de la sphère et du cylindre étant $x^2+y^2+z^2=r^2$ et $x^2+y^2-rx=0$, nous pouvons prendre pour équations paramétriques de la courbe gauche d'intersection

$$x=r\cos^2\theta,\quad y=r\sin\theta\cos\theta,\quad z=r\sin\theta.$$

Les équations de la tangente au point θ sont alors

$$-\frac{X-x}{\sin 2\theta}=\frac{Y-y}{\cos 2\theta}=\frac{Z-z}{\cos\theta}$$

et les coordonnées de la trace de cette tangente sur le plan $z=0$

$$X=r(1+\sin^2\theta),\ \therefore\ Y=r\tan\theta\sin^2\theta.$$

Eliminant θ, nous avons pour équation du lieu cherché,

$$(X-r)^3+Y^2(X-r)=rY^2;$$

c'est donc une cissoïde de Dioclès.

Solutions géométriques. Soient O le centre de la sphère, V le point de contact des traces horizontales de la sphère et du cylindre, P la projection horizontale d'un point (P) de la courbe gauche, t la tangente en V : les traces horizontales des plans tangents en (P) au cylindre et à la sphère sont évidemment la tangente en P au cercle OPV et la perpendiculaire à | OP | au point où | OP | coupe t; le lieu du point P′ commun à ces deux traces est donc la podaire par rapport au pôle V de la parabole ayant O pour foyer et son sommet en V, c'est-à-dire la cissoïde de Dioclès dont V est le rebroussement et la directrice de la parabole l'asymptote (d'inflexion).

Autrement. Puisque l'angle PVP′ est droit, le lieu de P′ est la tangentielle (d'Halphen) du cercle OPV par rapport à son point V, donc une cissoïde de Dioclès, etc.

Digitized by Google

Autrement. Si | VP′ | coupe le cercle OPV une seconde fois en Q et la tangente en O au point A, les triangles égaux PVP′, AOQ donnent AQ = VP′ et l'on tombe sur la construction classique de la cissoïde de Dioclès.

Remarque. Le lieu de la trace de la tangente sur le plan yz est

$$(r^2 + 2y^2)^2 = z^2 (r^2 + 4y^2),$$

et le lieu de la trace sur le plan xz est la cubique cuspidale $(x - r)^3 = (2x - r)\, z^2$.

Note. Solution analytique et géométrique par M. Déprez; solution géométrique par M. M. Droz-Farny, Gob, Jeřabek et Orlando.

La trace de la tangente à la fenêtre de Viviani sur le plan tangent au point V décrit une Kohlenspitzencurve (Déprez).

Nous regrettons de ne pouvoir reproduire, faute d'espace la solution de M. Jerabek, qui est accompagnée de plusieurs figures bien exécutées. Nous en extrayons les remarques suivantes :

1° La projection de la fenêtre de Viviani sur le plan xz est un arc de parabole.

2° La projection cylindrique de cette courbe sur le plan xy, les projetantes faisant l'angle du 45° avec Oz, est généralement un *trifolium oblique*; si les projetantes sont parallèles au plan xz, on obtient un *trifolium droit*; si ces projetantes sont parallèles au plan yz, la projection est un *trifolium double*.

×Question 1331.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, page 128).

Ramener l'une à l'autre les équations suivantes entre trois arcs x, y, z :

(1) $$\Sigma \sin (y + z) \sin (x - y) \sin (x - z) = 0,$$

(2) $$\Sigma \sin 2x \sin^2 (y - z) = 0,$$

(3) $$\Sigma \sin 2x - \Sigma \sin (2y + 2z - 2x) = 0,$$

(4) $$\sin (y + z) \sin (z + x) \sin (x + y) = \sin 2x \sin 2y \sin 2z,$$

(5) $$\Sigma \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} x} = 6.$$

(J. Neuberg).

Digitized by Google

Solutions par MM. Déprez, Emmerich, Rose et Delahaye. Désignons par A, B, C les premiers membres des équations (1), (2), (3). On trouve en opérant sur A

$$2\sin(x-y)\sin(x-z)=\cos(z-y)-\cos(2x-y-z),$$
$$2\sin(y+z)\cos(z-y)=\sin 2z+\sin 2y,$$
$$2\sin(y+z)\cos(2x-y-z)=\sin 2x-\sin(2x-2y-2z);$$

par suite,

$$4A=\Sigma(\sin 2z+\sin 2y)-\Sigma[\sin 2x+\sin(2y-2z-2x)]=C.$$

On peut écrire

$$C=\Sigma[\sin 2x-\sin(2x+2y-2z]$$
$$=\Sigma\sin 2x\,[1-\cos(2y-2z)]-\Sigma\cos 2x\sin(2y-2z).$$

La dernière somme étant identiquement nulle, il vient

$$C=\Sigma\sin 2x\cdot 2\sin^2(y-z)=2B.$$

D'après une identité connue,

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

par conséquent,

$$\Sigma\sin 2x-\sin 2(x+y+z)=4\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x),$$
$$\Sigma\sin(2y+2z+2x)-\sin 2(x+y+z)=4\sin 2x\sin 2y\sin 2z;$$

on en conclut

$$C=4\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x)-4\sin 2x\sin 2y\sin 2z.$$

Enfin, l'égalité (4), si l'on développe $\sin(y+z)$, $\sin(z+x)$, $\sin(x+y)$, qu'on remplace $\sin 2x,\ldots$ par $2\sin x\cos x,\ldots$ et qu'on divise les deux membres par $\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z$, donne, successivement,

$$(\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} y)=8\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z,$$
$$\Sigma\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)=6\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z,$$
$$\Sigma\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} z}=6.$$

Note. Voici *l'origine* de la question 1221. Cherchons la direction sur laquelle il faut projeter les côtés d'un triangle $A_1A_2A_3$ pour que la somme des carrés des projections soit maximum ou minimum (voir *Mathesis*, (2), X, Q. 1257, p. 56). Si les perpendiculaires abaissées de l'origine des

Digitized by Google

coordonnées sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et sur la direction cherchée font avec l'axe des x les angles α_1, α_2, α_3, φ, la somme considérée a pour expression

$$\lambda = 4R^2 \Sigma \sin^2 A_1 \cos^2(\alpha_1 - \varphi);$$

le maximum et le minimum de λ sont déterminés par l'équation

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0, \text{ ou } \Sigma \sin^2 A_1 \sin 2(\alpha_1 - \varphi) = 0.$$

Supposons la direction cherchée parallèle à l'axe des x; alors

$$\Sigma \sin^2 A_1 \sin 2\alpha_1 = 0. \tag{6}$$

D'autre part, les équations des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ étant

$$X_1 \equiv x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = 0, \text{ etc.}$$

l'ellipse circonscrite qui a son centre au centre de gravité de $A_1A_2A_3$ a pour équation

$$\Sigma (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)(x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3) \sin A_2 \sin A_3 = 0.$$

La condition nécessaire pour que ses axes principaux soient parallèles aux axes coordonnés est que le coefficient de xy s'annule; on trouve

$$\Sigma \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \sin A_2 \sin A_3 = 0. \tag{7}$$

Une autre méthode m'avait indiqué que les directions qui correspondent aux valeurs extrêmes de λ, étaient parallèles aux axes de l'ellipse de Steiner; j'en concluais l'identité des équations (6) et (7). Celles-ci se transforment en les équations (1) et (3) de la question 1221, si l'on remplace A_1, A_2, A_3 par $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$.

On obtient l'équation (6) en considérant l'ellipse (imaginaire) qui a pour centre G et qui est autopolaire à $A_1A_2A_3$. En effet, elle a pour équation $\Sigma X_1^2 \sin^2 A_1 = 0$, et ses axes principaux sont ceux de l'ellipse de Steiner. (J. Neuberg.)

---

*Question 1243.

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 264).

Soient A_1, B_1, C_1 *les centres des trois carrés inscrits au triangle* ABC. 1° *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un même point.* 2° *Les couples* (AB_1, AC_1), (BA_1, BC_1), (CA_1, CB_1) *sont isogonaux par rapport aux angles* A, B, C. 3° *Trouver le rapport des aires des triangles* $A_1B_1C_1$. ABC. 4° *Connaissant les points* B, C, A_1 *ou* B, A, A_1, *trouver le troisième sommet du triangle* ABC.

Digitized by Google

Solution par M. G. Gérard. Nous généralisons la question, en remplaçant les carrés par trois rectangles semblables quelconques inscrits au triangle ABC; ces rectangles sont définis par l'angle θ que font leurs diagonales avec le côté correspondant du triangle ABC; les lieux de leurs centres sont trois droites passant respectivement par le milieu de chaque côté et le milieu de la hauteur correspondante. Soit MNPQ l'un de ces rectangles, s'appuyant par son côté MN sur BC, par ses sommets P et Q sur AB et AC, et soit A_1 son centre. Menons par les sommets B et C du triangle ABC des parallèles BA_2, CA_2 aux diagonales MP, NQ de ce rectangle.

En considérant les triangles homothétiques PA_1Q, BA_2C *on voit que, le centre* A, *d'un rectangle d'angle* θ *construit sur le côté* BC, *se trouve sur la droite menée de* A *au sommet du triangle isoscèle d'angle* θ *construit sur* BC. Il convient d'attribuer un signe à l'angle θ, ce signe étant + ou — selon que le triangle BA_2C est dirigé vers l'intérieur ou vers l'extérieur du triangle fondamental. Observons aussi que A_1 étant le milieu des diagonales, les faisceaux $B(ACA_1A_2)$, $C(ABA_1A_2)$ sont harmoniques. Cela posé, soient A_1, B_1, C_1 les centres de trois rectangles d'angle θ inscrits au triangle ABC, A_2, B_2, C_2 les sommets des triangles isoscèles d'angle θ construits sur les côtés correspondants.

1° *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un même point* : en effet, ces trois droites passent respectivement par A_2, B_2, C_2; mais, les triangles isoscèles BA_2C,... sont semblables; donc, les droites AA_2, BB_2, CC_2 ou AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en un même point de l'hyperbole de Kiepert de ABC.

2° *Les couples tels que* AB_1, AC_1 *sont isogonaux* : en effet, les droites AB_1, AC_1 sont, par rapport à l'angle A, les conjuguées harmoniques de deux droites isogonales AB_2, AC_2.

3° Désignons par (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les coordonnées normales absolues des points A_1, B_1, C_1; par S, S_1 les aires ABC, $A_1B_1C_1$; par a_1, b_1, c_1 les diagonales des trois rectangles de centres A_1, B_1, C_1.

D'après une formule connue,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{hh'h''} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Si l'on construit les coordonnées des points A_1, B_1, C_1, on trouve facilement

$$\alpha = \tfrac{1}{2} a_1 \sin\theta, \quad \beta = \tfrac{1}{2} a_1 \sin(C+\theta), \quad \gamma = \tfrac{1}{2} a_1 \sin(B+\theta), \text{ etc.}$$

donc

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a_1 b_1 c_1}{8hh'h''} \begin{vmatrix} \sin\theta & \sin(C+\theta) & \sin(B+\theta) \\ \sin(C+\theta) & \sin\theta & \sin(A+\theta) \\ \sin(B+\theta) & \sin(A+\theta) & \sin\theta \end{vmatrix}.$$

Les côtés p, q du rectangle de centre A_1 sont égaux à $a_1 \sin\theta$, $a_1 \cos\theta$, et les triangles semblables APQ, ABC donnent

$$\frac{q}{a} = \frac{h-p}{h}, \quad \text{d'où} \quad a_1 \left(\frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin\theta}{h} \right) = 1.$$

On trouve de même b_1 et c_1. Quant au déterminant, il ne paraît pas susceptible de simplification.

4° Si l'on donne les points B, C, A_1, menons par A_1 les deux droites qui font avec la droite BC l'angle θ; nous aurons les demi-diagonales du rectangle de centre A_1, et il sera facile d'achever la figure.

Si l'on donne les points A, B, A_1, le sommet M du rectangle (opposé à P) est déterminé par l'intersection de la symétrique de la droite AB par rapport à A_1, avec l'arc du segment capable de l'angle θ décrit sur A_1B.

Note. MM. Emmerich et Déprez ont résolu la même question dans l'hypothèse où $\theta = 45°$. Dans le calcul de l'aire $A_1B_1C_1$, ils rencontrent le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin B + \cos B \\ \sin C + \cos C & \sin A + \cos A \\ \sin B + \cos B & 1 \end{vmatrix},$$

qui se réduit à $4 \cos A \cos B \cos C$.

Le déterminant considéré par M. Gérard se ramène à

$$2 \sin A \sin B \sin C \sin^5\theta \, (\cot^5\theta - \cot\theta + 2 \cot A \cot B \cot C).$$

L'aire $A_1B_1C_1$ s'annule et les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite lorsque

$$\cot^5\theta - \cot\theta + 2 \cot A \cot B \cot C = 0.$$

Cette équation, de la forme $x^5 + px + q = 0$, rentre dans le cas

Digitized by Google

irréductible; elle a donc trois racines réelles distinctes, excepté dans le cas du triangle équilatéral qui admet une racine double $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (A_1, B_1, C_1 sont alors confondus avec le centre du triangle) et une racine simple $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, laquelle rendrait les diagonales d'un rectangle parallèles à un côté sur lequel se trouverait une de leurs extrémités.

On sait que les points A_1, B_1, C_1 glissent sur les droites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ qui joignent les milieux A', B', C' des côtés de ABC aux milieux A'', B'', C'' des hauteurs correspondantes et concourent au point de Lemoine K. Comme les droites CA_1, CB_1 sont isogonales, les points A_1, B_1 décrivent deux ponctuelles homographiques; par suite, la droite A_1B_1 enveloppe une conique U_c tangente aux droites $A'A''$, $B'B''$ aux points qui sont les homologues de K; ces points sont sur la médiane CC'. Les droites CA_1, CB_1 peuvent coïncider avec les bissectrices de l'angle C, ces bissectrices sont donc des tangentes de U_c. Il est facile de construire les tangentes parallèles à $A'A''$, $B'B''$, et d'en déduire le centre de U_c, etc. Les droites B_1C_1, C_1A_1 enveloppent également des coniques U_a, U_b. Les trois courbes U_a, U_b, U_c ont trois tangentes communes, qui sont définies par l'équation

$$\cot^3\theta - \cot\theta + 2\cot A \cot B \cot C = 0.$$

(J. N.)

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

943. Résoudre un triangle, connaissant R, r_b, r_c.

On peut partir de la relation

$$r_b + r_c = 4R\cos^2\frac{A}{2},$$

qui fait connaître A; $p - b$ et $p - c$ peuvent se déduire de

$$p - b = r_c \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad p - c = r_b \operatorname{tg}\frac{A}{2};$$

a est donné par $a = 2R \sin A$; donc a, b, c sont connus.

944. Les symétriques des côtés d'un triangle ABC par rapport aux sommets opposés forment un nouveau triangle $A'B'C'$, dont les côtés valent cinq fois ceux de ABC. Les deux triangles ABC, $A'B'C'$ ont même centre de gravité (Comparez 949).

Digitized by Google

244. Résoudre un triangle, connaissant r_a, A, a.

On a

$$a = BD_a + CD_a = r_a\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \frac{r_a \cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

cette relation jointe à $B + C = \pi - A$ détermine B et C.

245. Soient a, b, c, d, les côtés AB, CD, CD, DA d'un quadrilatère sphérique convexe, circonscrit à un petit cercle. On a

$$\sin a \sin b \sin^2\frac{B}{2} = \sin c \sin d \sin^2\frac{A}{2},$$

$$\sin b \sin c \sin^2\frac{D}{2} = \sin a \sin d \sin^2\frac{A}{2}.$$

A déduire des relations

$$\cos AC = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos B = \cos c \cos d + \sin c \sin d \sin D,$$
$$a - b = d - c \text{ ou } \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos c \cos d + \sin c \sin d.$$

246. Soient α, β, γ, δ, les segments marqués sur les côtés d'un quadrilatère sphérique circonscrit à un petit cercle par les points de contact de ce cercle; le rayon r du cercle est donné par

$$\sin^2 r = \frac{\Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{\Sigma \operatorname{tg}\alpha}.$$

A déduire de $\operatorname{tg}\alpha = \sin r \operatorname{tg}\alpha', \ldots, \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$, où $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ désignent les angles des arcs OA, OB, OC, OD avec les rayons aboutissant aux points de contact voisins.

247. Si le nombre entier a est premier avec 30, $(a^2 - 1)(a^4 - 16)[a^2 - (2n + 1)^2]$ est divisible par 23040.

248. Dans un triangle ABC, inscrire un triangle A'B'C' semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$ et tel que ABC et A'B'C' soient orthologiques.

(E. Lemoine.)

Deux triangles ABC, A'B'C' sont dits orthologiques lorsque les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés du second concourent en un même point N, alors les perpendiculaires abaissées des sommets du second sur les côtés du premier sont également concourantes.

Le point N se détermine immédiatement au moyen de deux segments capables décrits sur AB et BC. Si une perpendiculaire à AN, coupe AB en C_1 et AC en B_1, des perpendiculaires abaissées de C_1 sur BN et de B_1 sur CN se coupent en un point P, tel que AP rencontre BC au sommet cherché C'.

Digitized by Google

949. Les plans symétriques des faces d'un tétraèdre par rapport aux sommets opposés forment un nouveau tétraèdre. Les deux tétraèdres ont même centre de gravité, et les arêtes correspondantes sont dans le rapport 1 : 7 (Comp. 943). (J. N.).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1269. Le sommet A et le pied D de la bissectrice de l'angle BAC d'un triangle ABC étant fixes, trouver les lieux décrits par les sommets B et C lorsqu'on donne 1° le rapport AB : AC; 2° le produit AB . AC; 3° la somme AB + AC; 4° la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; 5° l'aire ABC.

(J. Neuberg.)

1270. Chercher le lieu des points symétriques de ceux d'une chaînette par rapport aux pieds des normales à la courbe. (H. Brocard.)

1271. Soit

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m = 1 + A_{m,1}\,x + A_{m,2}\,x^2 + A_{m,3}\,x^3 + \text{etc.};$$

démontrer la formule :

$$1 + A_{m,1} + A_{m-1,2} + A_{m-2,3} + \cdots + A_{2,m-1} + A_{1,m} = u_{m+k+1}$$

quelques uns des derniers termes du premier membre peuvent être nuls, car $A_{i,j} = 0$ si $j > ik$; u_{m+k+1} désigne le terme de rang $m + k + 2$, dans la suite de Fibonacci généralisée, où chaque terme est la somme des $k + 1$ précédents, les valeurs initiales étant :

$$u_0 = u_1 = u_2 = \cdots u_{k-1} = 0, \quad u_k = 1.$$ (A. Boutin.)

×**1272.** Un triangle indéterminé ABC a son sommet A sur une circonférence donnée α, son sommet B sur une autre circonférence donnée β, et son sommet C sur une troisième circonférence donnée γ. Trouver la courbe ou les courbes qui limitent les régions du plan où se trouve le barycentre d'un de ces triangles.

Question analogue pour le barycentre d'un tétraèdre indéterminé dont les sommets appartiennent à quatre sphères données. (E. Lemoine.)

Rectifications. (2) IX, p. 255, q. 1084, 1° lire D au lieu 2 D. (?) X, p. 28 et p. 78, mentionner une solution de 1198 par M. Déprez, de 1136, par M. Barisien. (2), X, p. 104, q. 1266, lire OM.OM' au lieu de OM + OM'.

Digitized by Google

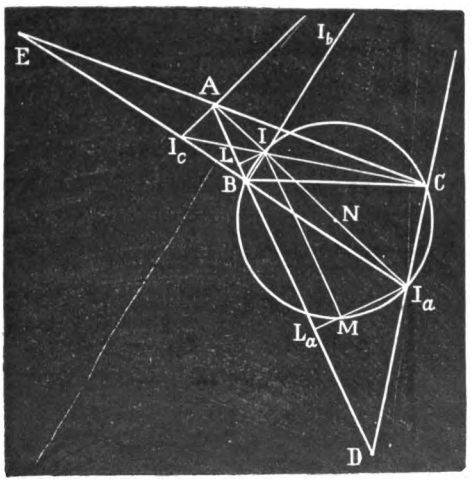
×SUR LE TRIANGLE PSEUDO-ISOSCÈLE(*);

par M. A. Emmerich.

1. J'appelle *triangle pseudo-isoscèle* un triangle ABC dont les bissectrices extérieures BE, CD sont égales sans que l'on ait AB = AC.

Ce triangle fait l'objet de la question 129 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, posée par M. Alauda et reprise par *Mathesis* sous le n° 950. Je vais d'abord résumer les développements donnés par MM. Soons et Neuberg (voir *Mathesis*, (2) V, p. 261).

On sait que



$$\overline{CD}^2 = \frac{ab(p-a)(p-b)}{(b-a)^2}, \quad \overline{BE}^2 = \frac{ac(p-a)(p-c)}{(c-a)^2}; \qquad (1)$$

l'égalité de CD et BE s'exprime donc par l'équation

$$b(p-b)(c-a)^2 = c(p-c)(b-a)^2,$$

laquelle, développée et débarrassée du facteur $b-c$ que nous supposons différent de zéro, se ramène à

$$f(a) = a^3 - a^2(b+c) + 3abc - bc(b+c) = 0. \qquad (2)$$

(*) L'expression de triangle pseudo-isoscèle m'a été proposée par M. Neuberg. J'ai publié dès 1894 des questions ou remarques sur le triangle dans la *Zeitschrift de Hoffmann*.

Digitized by Google

Considérons les côtés b et c comme donnés, et soit $b > c$. De $f(b) > 0$, $f(c) < 0$, $f(b-c) < 0$, on conclut que l'équation (2) a toujours une racine réelle (*) satisfaisant aux inégalités $b > a > c$, $a > (b-c)$; ces conditions sont suffisantes pour que a, b, c soient les côtés d'un triangle.

Le point D est sur le prolongement de AB au-delà de B, E est sur le prolongement de CA au-delà de A; c'est ce que l'on déduit facilement de $B > A > C$.

3. En remplaçant $3abc$ par $2abc + abc$, on trouve facilement

$$f(a) \equiv -a^2(b+c-a) + 2abc - bc(b+c-a);$$

donc l'équation (2) peut prendre la forme

$$(a^2 + bc)(p-a) = abc. \tag{3}$$

On en conclut la relation de M. Alauda :

$$a^2 + bc = 4Rr_a. \tag{4}$$

Écrivons l'équation (3) ainsi :

$$a^2(p-a) = bc(2a-p);$$

en la multipliant par p et observant que $2ap - p^2 = a^2 - (p-a)^2$, nous aurons

$$bc(p-a)^2 = a^2[bc - p(p-a)] = a^2(p-b)(p-c),$$

ou bien

$$\left(\frac{p-a}{a}\right)^2 = \frac{p-b}{b}\cdot\frac{p-c}{c}. \tag{5}$$

Cette équation conduit à des conséquences remarquables. Elle sert à vérifier immédiatement que

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C. \tag{6}$$

Pour démontrer la relation (6) par la trigonométrie, remarquons que

$$\frac{BE}{a} = \frac{\sin C}{\sin\frac{1}{2}(A-C)}, \quad \frac{CD}{a} = \frac{\sin B}{\sin\frac{1}{2}(B-A)};$$

(*) Si l'on remplace a par $\frac{bc}{x}$, on obtient une équation $\varphi(x) = 0$, dont la dérivée a des racines imaginaires; $\varphi(x)$ est donc une fonction qui varie toujours dans le même sens. On en conclut que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une seule racine réelle. La racine réelle de (1) est comprise entre b et $\frac{1}{2}(b+c)$; car $f\left(\frac{b+c}{2}\right)$ est inférieure à 0. Si $b = c$, l'équation (2) donne $a = b = c$. (J. N.)

Digitized by Google

par suite, si BE = CD, on a, successivement,

$$\sin C \sin \tfrac{1}{2}(B - A) = \sin B \sin \tfrac{1}{2}(A - C),$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(B - A) = \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2}(A + C) \sin \tfrac{1}{2}(A - C),$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C (\sin^2 \tfrac{1}{2} B - \sin^2 \tfrac{1}{2} A) = \sin \tfrac{1}{2} B (\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} C),$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A (\sin \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} C) = \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C (\sin \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} C).$$

3. Soient I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles inscrits et ex-inscrits. On a

$$r = AI \sin \frac{A}{2} = BI \sin \frac{B}{2} = CI \sin \frac{C}{2};$$

la relation (6) peut donc se transformer en celle-ci :

$$\overline{AI}^2 = BI \cdot CI. \tag{7}$$

I étant l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$, on sait que

$$IA \cdot II_a = IB \cdot II_b = IC \cdot II_c;$$

par conséquent, la relation (7) est équivalente à

$$\overline{II_a}^2 = II_b \cdot II_c, \tag{8}$$

et les angles du triangle $I_aI_bI_c$, que nous désignons par A', B', C', sont liés par l'égalité

$$\cos^2 A' = \cos B' \cos C'. \tag{9}$$

Les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ sur les côtés de ce triangle sont, d'après l'équation (8), telles que l'une est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

En appliquant la proportion des sinus aux triangles ABI_a et ACI_a, BI_cC et BI_bC, etc., on déduit, de l'égalité (6), les égalités suivantes :

$$BI_a \cdot CI_a = bc, \quad BI_c \cdot CI_b = a^2, \quad (r_a - r)^2 = 4Rr^2.$$

$$(r_a - r)^2 = (r_b - r)(r_c - r) = bc - 4Rr.$$

4. Abaissons IL, I_aL_a perpendiculaires à AB, IM perpendiculaire à I_aL_a. Des triangles semblables AIL et II_aM, BIL et I_aIC, on conclut

$$\frac{AI}{r} = \frac{II_a}{r_a - r}, \quad \frac{BI}{r} = \frac{II_a}{\overline{CI}};$$

or $BI \cdot CI = \overline{AI}^2$; par suite,

$$AI = r_a - r, \quad II_a = \frac{(r_a - r)^2}{r}, \quad AI_a = \frac{r_a (r_a - r)}{r}.$$

5. Ce résultat donne un moyen de construire un triangle pseudo-

Digitized by Google

isoscèle dont on connaît la base $BC = a$ et l'angle opposé A. On construira le triangle rectangle IMI_a dont on connaît un côté $IM = a$ et l'angle $I = \frac{1}{2}A$; on prolongera I_aI de $IA = MI_a$. Les sommets B et C seront déterminés par l'intersection de la circonférence de diamètre II_a avec les droites menées par A et faisant avec AI l'angle $\frac{1}{2}A$; il faut prendre parmi les quatre points de rencontre deux qui ne sont pas symétriques par rapport à AI.

Pour que le problème soit possible, il faut que la droite AD menée parallèlement à IM rencontre la circonférence ou que sa distance δ au centre N de la circonférence soit moindre que le rayon NI. Si l'on fait $NI = \rho$, on trouve

$$AI = MI_a = 2\rho \sin\tfrac{1}{2}A, \quad \delta = AN \sin\tfrac{1}{2}A = (2\rho \sin\tfrac{1}{2}A + \rho)\sin\tfrac{1}{2}A;$$

par suite, la condition $\delta < \rho$ donne

$$2\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} - 1 < 0,$$

et comme le trinôme du premier membre a pour racines $\frac{1}{2}$ et -1, on voit que $\sin\frac{A}{2} < 1$ ou $A < 60°$. On peut confirmer ce résultat : Si l'on mène MPM′ perpendiculaire à II_a, on a $PI_a = IL$; donc si $IM > MM'$, la droite AD rencontre la circonférence.

6. Un triangle rectangle en B peut-il être pseudo-isoscèle? La relation (6) devient

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{A+90}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right),$$

ou bien

$$4\sin^4\frac{A}{2} + 4\sin^3\frac{A}{2} + 2\sin^2\frac{A}{2} - 1 = 0,$$

ou encore

$$\cos^4 A - 4\cos^3 A + 5\cos^2 A - 1 = 0.$$

On en conclut $A = 54° 57'19'',6$.

M. Stegemann (Prenzlau) a déduit, de l'équation (6), que dans un tel triangle

$$b(b-a) = (b-c)^2, \quad c(b-c) = b(a-c).$$

Ces relations sont équivalentes à

$$c^2 - 2bc + ab = 0. \qquad (10)$$

Digitized by Google

Nous les concluons de l'équation (2). On a

$$f(a) \equiv 2abc - (a^2 + bc)(b + c - a), \quad b^2 = c^2 + a^2;$$

d'où

$$(b + a - c) f(a) \equiv 2ac(c^2 - 2bc + ab).$$

On peut aussi remarquer les égalités

$$AI = r_a - r = b - c, \quad \frac{BI}{CI} = \frac{b - c}{b}.$$

Si A_1 est le symétrique de A par rapport à CI, les triangles rectangles AA_1I, AA_1B donnent

$$\overline{AA_1}^2 = 2(b - c)^2, \quad \overline{AA_1}^2 = c^2 + (b - a)^2,$$

d'où résulte également la relation (10).

Des triangles semblables A_1BI, AIC on déduit

$$\frac{b - a}{b - c} = \frac{b - c}{b} = \frac{BI}{CI}.$$

Enfin, si l'on construit le symétrique C_1 de C par rapport à AI, on tire, des triangles semblables C_1BI, CIA,

$$\frac{b - c}{BI} = \frac{CI}{AI},$$

ce qui démontre de nouveau l'égalité $AI = b - c$.

7. Nous sommes parvenu à démontrer géométriquement que tout triangle satisfaisant à la relation $\overline{AI}^2 = BI.CI$ est pseudo-isoscèle; la démonstration est assez compliquée.

Il y a sans doute encore d'autres relations, assez curieuses, entre les éléments du triangle pseudo-isoscèle ou entre ceux du triangle correspondant $I_aI_bI_c$. On peut aussi étudier les lieux du sommet opposé et des centres des cercles tritangents lorsqu'un côté BC ou AB est donné.

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Sur la question* 1222 (*Mathesis*, (2) IX, p. 238 et (2), X p. 122.). Un *lapsus memoriae* m'ayant fait attribuer à la question 1222, 3°, la réponse qui convient à la question 1257 (*Mathesis*, (2) X, p. 122), je vais rectifier l'erreur.

Digitized by Google

Soient l, m, n les projections d'une longueur MM' sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle. On demande pour quelle orientation de MM' la somme $l^2 + m^2 + n^2$ est maximum ou minimum.

Soient α_1, α_2, α_3, φ les angles de l'axe des x avec les perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur BC, CA, AB et sur la direction MM'. Il s'agit de trouver le maximum ou le minimum de

$$\lambda \equiv \cos^2(\alpha_1 - \varphi) + \cos^2(\alpha_2 - \varphi) + \cos^2(\alpha_3 - \varphi),$$

Posons donc

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin 2(\alpha_1 - \varphi) + \sin 2(\alpha_2 - \varphi) + \sin 2(\alpha_3 - \varphi) = 0. \quad (1)$$

Cette équation donne

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3}{\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 + \cos 2\alpha_3}. \quad (2)$$

Elle conduit à une construction élégante de la direction cherchée. Soient OA', OB', OC' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur BC, CA, AB; prenons sur OX une longueur ON = 1 et appelons N_1, N_2, N_3 les symétriques de N par rapport à OA', OB', OC'. Les coordonnées des points N_1, N_2, N_3 étant $(\sin 2\alpha_1, \cos 2\alpha_1)$, $(\sin 2\alpha_2, \cos 2\alpha_2)$, $(\sin 2\alpha_3, \cos 2\alpha_3)$, si P est le centre de gravité des points N_1, N_2, N_3, l'équation (2) revient à

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} \mathrm{XOP};$$

d'où l'on conclut que les bissectrices des angles formés par les droites OX, OP, résolvent la question; l'une correspond à un maximum de λ, l'autre à un minimum. Pour simplifier la construction on peut faire coïncider OX avec OA' ou remplacer OA', OB', OC' par des parallèles à BC, CA, AB.

Voici une autre solution. Le lieu d'un point dont la somme des carrés des distances aux côtés du triangle ABC est constante, a pour équation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \lambda^2,$$

où

$$X_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \text{ etc.}$$

sont les équations cartésiennes des droites BC, CA, AB. Lorsque λ^2 varie, on a une suite d'ellipses semblables (*ellipses de Cesàro*; voir *Mathesis*

Digitized by Google

(1) I, p. 129), ayant pour centre le point de Lemoine K. Les axes de symétrie de ces coniques donnent les directions cherchées. En effet, si ces droites sont prises pour axes des coordonnées, le coefficient de xy, dans le développement de $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ doit être nul; ce qui revient à

$$\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3 = 0.$$

Mais telle est aussi l'équation (1), si les directions cherchées sont parallèles aux axes coordonnés.

L'ellipse (imaginaire)

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

étant conjuguée au triangle ABC, on voit que BC, CA, AB sont parallèles aux diamètres conjugués avec les diamètres KA, KB, KC. Cette remarque conduit à une nouvelle solution de la question 1222.

(J. NEUBERG.)

×**12.** ***Propriétés d'un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique.*** Si l'on appelle a, b, c, les côtés d'un triangle, A, B, C les angles, S la surface, R, r, r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits, α la bissectrice de A, m la médiane de a, M l'angle de m avec a, et si l'on suppose que les côtés du triangle sont en progression arithmétique de raison d, de sorte que les côtés sont

$$a - d, \qquad a, \qquad a + d,$$

on a d'abord $b - a = a - c$. On a, de plus, les relations :

$$\cos\tfrac{1}{2}(B - C) = 2\sin\tfrac{1}{2}A, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{3};$$

$$d = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{1 - 4\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos^2\frac{1}{2}A}};$$

$$r = \frac{h}{3} = \tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 4d^2}{3}};$$

$$r_1 = 3r = h = \tfrac{3}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 4d^2}{3}};$$

$$S = \tfrac{3}{4}a^2\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \tfrac{3}{4}a\sqrt{\frac{a^2 - 4d^2}{3}};$$

$$m = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}A}\sqrt{3\cos A + \cos^2\tfrac{1}{2}A};$$

Digitized by Google

$$\cos M = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{1 - 4\sin^2\frac{1}{2}A}{\sin^2\frac{1}{2}A}};$$

$$\alpha = \frac{5}{4}\frac{a}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Il est facile de multiplier le nombre de ces relations particulières. Nous n'avons cité que celles qui peuvent avoir le plus d'importance dans la résolution des triangles, dans les cas où le triangle a ses côtés en progression arithmétique. (C. COUTURIER).

×**13**. PROBLÈME. *Construire un angle dont la tangente trigonométrique est le cube de la tangente trigonométrique d'un angle donné.*

Soit XOY l'angle donné. Ayant pris un point A quelconque sur OX, on décrit le cercle de diamètre OA ; la tangente en A rencontre OY en B ; OB rencontre le cercle en C. On prend le point M symétrique de C par rapport au milieu de OB. L'angle MAO est tel que

$$\text{tg MAO} = \text{tg}^3 \text{MOA}.$$

Le point M décrit d'ailleurs la cissoïde droite dont le point de rebroussement est en O et dont l'asymptote est la droite AB. (E. N. BARISIEN.)

SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE;

par M. E. BARISIEN.

(*Suite et fin*; voir *Mathesis* (2) X, p. 113).

93. Lieu du point d'intersection de OA′ avec AD :

$$(x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2) = (ax^2 - by^2)^2.$$

94. Lieu du point d'intersection de OA′ avec AD′ :

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

95. Lieu du point d'intersection de AD′ avec la droite symétrique de OA′ par rapport aux axes de E :

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}.$$

Digitized by Google

96. Lieu du point d'intersection de OA''' avec AD' :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2(a+b)^2.$$

97. Lieu du point d'intersection de OA''' avec AD :

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2(b^4x^2 + a^4y^2) = a^2b^2(b^5x^2 - a^5y^2)^2.$$

98. Lieu du point d'intersection de OA''' avec BC :

$$(b^4x^2 + a^2y^2)^2 = R^2(b^4x^2 + a^4y^2), \quad U = \frac{\pi ab(a^2+b^2)}{2(a+b)^2}.$$

99. Lieu du point d'intersection de OA''' avec B'C' :

$$(bx^2 + ay^2)^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^4}(b^4x^2 + a^4y^2); \quad U = \frac{\pi ab\sqrt{ab}(a^2+b^2-ab)}{2(a+b)^5}.$$

100. Lieu du point d'intersection de OA''' avec la perpendiculaire abaissée de A sur BC :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4}{(a+b)^2}.$$

101. Lieu du point d'intersection de OA''' avec la normale à E en A :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4(a+b)^2}{(a^2+b^2+ab)^2}.$$

102. Lieu du point d'intersection de OA''' avec la tangente à E en A :

$$(b^5x^2 + a^5y^2)^2 = a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2); \quad U = \frac{\pi}{2}(a+b)\sqrt{ab}.$$

L'aire de cette courbe est la même que celle de la courbe (3).

103. Lieu du point d'intersection de OA''' avec la droite AA' :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4}{4(a+b)^2}.$$

104. Le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle des neuf points des triangles DBC et D'BC, décrivent des courbes du genre des courbes du n° 58.

105. Aire du lieu du centre de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère ABCD :

$$U = \frac{3\pi(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2}.$$

On voit, d'après (45), que *le rapport de l'aire du lieu du centre du cercle*

Digitized by Google

circonscrit à ABCD *à l'aire du lieu du centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à* ABCD, *est* $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$.

106. Le lieu du milieu de la distance des centres du cercle et de l'hyperbole équilatère circonscrits au quadrilatère ABCD est une courbe analogue aux courbes du n° 58.

107. Aire du lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD :

$$U = \frac{3}{4}\pi R^2.$$

108. Aire du lieu du centre de l'hyperbole d'Apollonius passant par A, B, C, D' : $U = 3\pi R^2$.

109. Lieu du quatrième point de rencontre des deux hyperboles équilatères circonscrites aux quadrilatères ABCD et ABCD' : Ce lieu est la courbe du n° 48.

110. Le point de rencontre des axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD décrit une courbe du genre de la courbe du n° 58.

111. Lieu du point de rencontre de la tangente en A'' à Σ avec la perpendiculaire abaissée de A sur le grand axe de E :

$$y^2 = \frac{(x^2 - aR)^2}{a^2 - x^2}.$$

112. Lieu du point de rencontre de la tangente en A'' à Σ avec la perpendiculaire abaissée de A sur le petit axe de E :

$$x^2 = \frac{(y^2 - bR)^2}{b^2 - y^2}.$$

113. Aire du lieu du centre des cercles circonscrits aux triangles D'BC, D'AB, D'AC :

$$U = \frac{\pi}{4}(a-b)^2.$$

114. Aire du lieu du centre de gravité du triangle AB'C' :

$$U = \frac{\pi}{9}\left[ab + 4R^2 + \frac{2R^4(a^2+b^2)}{a^2b^2}\right].$$

115. Aire du lieu du centre de gravité du triangle A''BC :

$$U = \frac{\pi R^2}{9ab}[2(a^2+b^2) - 3ab].$$

Digitized by Google

116. Aire de l'enveloppe de la parallèle menée par A à BC :

$$U = \pi ab - \frac{\pi(a-b)^2}{8}.$$

117. Lieu de la projection de O sur la parallèle menée par A à BC :

$$(x^2+y^2)^3 = (ax^2+by^2)^2 \; ; \quad U = \pi ab + \frac{3\pi(a-b)^2}{8}.$$

118. Voir la propriété 110 d'un article sur les Cercles de Chasles (*Mathesis*, (2). V, p. 249).

REMARQUE. Le cercle de rayon $\left(\frac{ab}{a+b}\right)$ offre une analogie curieuse avec le cercle de Chasles de rayon $(a+b)$; on pourrait aussi étudier le cercle de rayon $\left(\frac{ab}{a-b}\right)$ qui a de l'analogie avec le cercle de Chasles de rayon $(a-b)$.

BIBLIOGRAPHIE.

I. **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik**, von MORITZ CANTOR. Zweiter Band. Zweiter Halbband. Von 1550-1668. Mit 97 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1900 (XII et 481 à 948 pp. gr. in 8). Prix : 12 marcs.

II. **Cantor's Festschrift.** Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik Neuntes Heft, mit einem Porträt in Heliogravure, zwei Tafeln und 55 Figures im Text. Herrn Hofrat und Professor Dr. Moritz Cantor bei der 70. Wiederkehr des Tages seiner Geburt am 23. August 1899 dargebracht von seinen Freunden und Verehrern Im Auftrage herausgegeben von M. Curtze in Thorn und S. Günther in München. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1899 (VIII-657 pp. in 8°). Prix : 20 marcs.

I. La seconde partie du tome deuxième de la nouvelle édition du grand ouvrage de Cantor, en contient les chapitres 64-81, dont les trois premiers sont consacrés aux mathématiciens italiens de 1500 à 1550 et, en particulier, à Tartaglia, à Cardan et à la découverte de la résolution de l'équation cubique. Nous avons indiqué autrefois, à propos de la première édition (*Mathesis*, 1893, (2), III, 16), les principales subdivisions de l'ouvrage pour les périodes de 1550 à 1600 et de 1600 à 1668. Elles ont été conservées dans la nouvelle édition, mais l'auteur a introduit une foule d'améliorations de détail dans chaque chapitre. On trouve des additions surtout dans les pages consacrées à Cardan, Tartaglia, Bombelli, Forcadel, Clavius, Praetorius, Neper, Bürgi, Kepler, Huygens.

Dans la préface, l'auteur indique en outre un certain nombre de corrections ou d'additions qui lui ont été suggérées par diverses publications pendant l'impression de son livre.

Le livre de Cantor constitue le *Standard-Book* sur l'histoire des Mathématiques,

Digitized by Google

à cause de son étendue et de sa valeur intrinsèque. Nous ne pouvons que le recommander une fois de plus à l'attention des professeurs (*).

II. Le beau volume offert, par ses admirateurs et ses amis, à l'éminent historien des mathématiques, à l'occasion du 70e anniversaire de sa naissance, contient trois mémoires en français par Bobynine, Mansion et P. Tannery; deux en anglais par Heath et Cajori; deux en italien, par Favaro et G. Loria; vingt cinq en allemand, dont deux par les historiens de la physique, Rosenberger et Heller; cinq sur les mathématiques grecques, par A. Sturm, A. Nagl, Suter, Hultsch, Heiberg; huit sur le moyen-âge et la renaissance, par Cürtze, Günther, F. Müller, E. Wappler, H. Staigmüller, Steinschneider, Hunrath et v. Braunmühl; cinq sur le 17e et le 18e siècle, par Wohlwill, Wertheim, J. H. Graf, Eneström, E. Gelcich; cinq sur les mathématiques modernes par Dickstein, Stäckel, F. Meyer, Unger. Une liste des livres, mémoires, notes de Cantor, par Cürtze (26 pages en petits caractères) et un index terminent le volume. (P. M.)

Principales formules de la théorie des fonctions elliptiques. Tableau résumé publié par les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1900 (10 p. in-8°). Prix : 75 centimes.

Tous ceux qui se sont occupés de la théorie des fonctions elliptiques savent combien il est difficile d'en retenir les formules d'une manière permanente. C'est pourquoi, en France, on permet aux candidats à l'agrégation de mathématiques de se servir du tableau résumé qui a été publié par les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le choix des formules qui entrent dans le tableau nous semblent très judicieux. En voici la liste sommaire : *Fonctions de Weierstrass* : Développement en produits infinis et en séries : sin u, cot u, cosec^2 u σu, ξu, pu, $p'u$. Développement en séries entières de σu, ξu, pu, g_2, g_3 Relations entre pu et ses dérivées, homogénéité, dégénérescence, périodicité et formules d'addition. Racines e_1, e_2, e_3; fonctions σ_1, σ_2, σ_3; valeurs réelles de pu quand ω, $\omega'i$ sont réelles. *Fonctions de Jacobi*. Séries et produits infinis; addition d'une demi-période ou d'une période; relations avec les fonctions σ. *Fonctions* sn$u$. cn$u$, dn$u$. Relations avec les fonctions theta; addition d'une demi-période ou d'une période; argument purement imaginaire; relation entre pu et sn$u$; valeurs réelles quand K et K' sont réelles [ces valeurs sont les mêmes dans tous les cas]; formules d'addition; dérivées; séries entières; dernières notations de Jacobi pour les fonctions *théta*. (P. M.)

(*) Dans la *Bibliotheca mathematica* d'Eneström, 1900, (3), I, 265-274, on trouve des remarques de détail dues à divers auteurs sur les deux premiers volumes de l'ouvrage de Cantor; dans le *Bollettino* de G. Loria, 1900, pp. 41-46 des indications complémentaires sur divers sujets traités dans le second volume. Ainsi, grâce à la collaboration de tous ceux qui s'occupent d'histoire des mathématiques, on espère donner à la *Geschichte der Mathematik* du savant professeur de Heidelberg, dans ses éditions successives, une perfection de plus en plus grande.

Digitized by Google

Pages choisies des savants modernes, extraites de leurs œuvres par A. Rebière. Orné de portraits. Paris, Nony et Cie (VIII1-618 pages in-8°).

Pour faire connaître à nos lecteurs le but du présent ouvrage qui complète si heureusement *la vie et les travaux des savants modernes*, du même auteur, nous empruntons à l'avant-propos les lignes suivantes :

« On a publié de nombreux *Morceaux choisis* des écrivains, des poètes, des historiens et des philosophes. Mais ce qui a été fait — avec une certaine outrance — pour les Lettres, restait encore à faire pour les Sciences. On peut en être surpris, étant donnée l'importance toujours croissante de ces dernières, pendant le siècle qui va finir.

Nos savants classiques ne se bornaient pas à instruire leurs disciples directs, ils parlaient aussi aux autres hommes dans les préfaces, les têtes de chapitre, les résumés et les notes de leurs ouvrages. Il suffisait de réunir ce qui était ainsi dispersé.

.... On trouvera dans ce recueil, non seulement des aperçus purement scientifiques, mais encore des extraits sur l'histoire et la philosophie des sciences et aussi sur les Méthodes de découverte et d'enseignement.

.... Il faudrait, pour compléter le tableau, deux autres volumes, l'un consacré aux Savants de l'Antiquité et du Moyen-Age et l'autre aux Savants contemporains. »

M. Rebière vient de mourir, le 21 février dernier, à l'âge de cinquante-huit ans. Il est à désirer que les deux volumes qu'il annonce à la fin de l'avant-propos et pour lesquels il avait sans doute déjà réuni des documents viennent compléter la série des ouvrages si instructifs qu'il a publiés sur les Savants et leurs travaux.

La lecture des *Pages choisies* est fort attrayante. L'auteur a réuni plus de deux cents morceaux, d'un caractère très varié, empruntés aux écrits de soixante-treize savants des plus illustres, mathématiciens, astronomes, physiciens, chimistes ou naturalistes Son livre est éminemment propre à inspirer à la jeunesse le goût des sciences.

L'exécution typographique est irréprochable; elle fait honneur à la maison Nony. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

Question 1002.

(Voir *Mathesis*. (2), V, p. 32).

Si une courbe algébrique dépourvue de nœuds et de rebroussements est de l'ordre n, *sa podaire a* 3n *points d'inflexion.* (V. Retali).

Solution par M. V. Retali. Comme la courbe donnée est générale de son ordre, en appelant m sa classe $n(n-1)$, la podaire est en général, de l'ordre $\nu = 2m$ et de la classe $\mu = n + \nu$; et, puisqu'elle ne possède

Digitized by Google

pas de points multiples en dehors des ses trois points m^{tuples} au pôle et aux points circulaires, le nombre de ses rebroussements est zéro, et, par suite, celui de ses points d'inflexion est

$$\iota = 3(\mu - \nu) = 3n.$$

On démontre de même que l'inverse de la courbe donnée a $3m$ points d'inflexion.

×Question 1059.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 280.)

Calculer en fonction des côtés AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, *le rapport des segments déterminés sur le côté* AD *d'un pseudo-carré par la perpendiculaire* MP *abaissée du milieu* M *du côté opposé* BC. (E. COLART.)

Solution par M. FAIRON (Seraing). Soient AC $= f$, BD $= g$, AM $= m$, DM $= n$, AP $= p$, DP $= q$. On trouve facilement

$$m^2 = n^2 + d^2 - 2dq, \quad n^2 = m^2 + d^2 - 2dp, \tag{1}$$

$$a^2 + f^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}, \quad c^2 + g^2 = 2n^2 + \frac{b^2}{2}; \tag{2}$$

de (1) et (2) on tire respectivement

$$\frac{p}{q} = \frac{m^2 - n^2 + d^2}{n^2 - m^2 + d^2}, \quad a^2 - c^2 + f^2 - g^2 = 2(m^2 - n^2).$$

Donc, si $f = g$, on a

$$\frac{p}{q} = \frac{a^2 - c^2 + 2d^2}{c^2 - a^2 + 2d^2}.$$

Si l'on applique la règle des signes aux segments AP, DP, on doit écrire

$$\frac{p}{q} = -\frac{a^2 - c^2 + 2d^2}{a^2 - c^2 - 2d^2}.$$

×Question 1071.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 128).

Au cercle I, *inscrit à un triangle équilatéral* ABC, *on mène une tangente quelconque, qui coupe les côtés du triangle aux points* α, β, γ, *de chacun desquels on mène la seconde tangente respectivement aux cercles exinscrits*

Digitized by Google

I_a, I_b, I_c. *Chercher les lieux des sommets du triangle formé par ces droites.* (E. Duporcq.)

Solution géométrique par M. Droz Farny. Appelons T la quatrième tangente commune aux cercles I_b, I_c, et soient β', γ' les points où cette droite est rencontrée par la seconde tangente menée de β au cercle I_b, et de γ au cercle I_c. Les couples $\beta\gamma$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ engendrent des ponctuelles projectives : par suite, les points β', γ' se correspondant dans deux ponctuelles projectives. Mais lorsqu'on suppose β en A, γ coïncide avec le point de contact de AB avec le cercle I, et les droites $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ coïncident toutes deux avec AB; les points β', γ' sont alors confondus. Ces points sont encore confondus lorsque γ coïncide avec A ou β avec C et γ avec B. Donc les ponctuelles (β'), (γ') ayant trois points doubles sont identiques: T est donc le lieu du point de concours des tangentes menées de β au cercle I_b et de γ au cercle I_c.

Note. D'après cette démonstration ingénieuse, si Σ est une conique quelconque touchant les côtés d'un triangle quelconque ABC aux points A', B', C' et si Σ_a, Σ_b, Σ_c, sont trois autres coniques inscrites dont la première touche BC en A', la seconde CA en B', la troisième AB en C', toute tangente menée à Σ rencontre BC, CA, AB en trois points α, β, γ tels que les secondes tangentes menées de α à Σ_a, de β à Σ_b, de γ à Σ_c forment un triangle inscrit au triangle qui a pour côtés les quatrièmes tangentes communes aux courbes Σ_a Σ_b Σ_c considérées deux à deux. La transformation par polaires réciproques conduit à un autre théorème intéressant. (J. N.).

Solution analytique par M. Deprez. Soit A' le point d'intersection des secondes tangentes menées de β au cercle I_b et de γ au cercle I_c. Les droites A'β, A'γ étant représentées par

$$x + \mu y + \nu z = 0, \quad x + \mu' y + \nu' z = 0, \qquad (1), (2)$$

et les cercles I_b, I_c ayant pour équations

$$\sqrt{x} + \sqrt{-\beta y} + \sqrt{z} = 0, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{-\gamma z} = 0,$$

on a les conditions

$$1 - \frac{3}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 0, \quad 1 + \frac{1}{\mu'} - \frac{3}{\nu'} = 0. \qquad (3), (4)$$

Digitized by Google

La droite $\beta\gamma$ aura pour équation $x + \mu' y + \nu z = 0$; pour qu'elle touche le cercle I, qui a pour équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$, on doit avoir

$$1 + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\nu} = 0. \qquad (5)$$

On aura donc l'équation du lieu (A') en éliminant μ, ν, μ', ν' entre (1), (2), (3), (4) et (5). En comparant (3), (4), (5) on trouve $\mu = -3\mu'$, $\nu' = -3\nu$, ce qui ramène les équations (1), (2) à la forme

$$x - 3\mu' y + \nu z = 0, \quad x + \mu' y - 3\nu z = 0. \qquad (6)$$

Tirons de (6) les valeurs de μ' et ν pour les porter dans (5); il vient

$$x + 2y + 2z = 0.$$

Le lieu de A est donc la droite symétrique de BC par rapport à A.

Autre solution analytique par M. EMMERICH.

Question 1092.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 240 et 279.)

La tangente en un point M *quelconque d'une ellipse rencontre le grand axe en* T *et le petit axe en* T'; *la normale au même point* M *rencontre le grand axe en* N *et le petit axe en* N'. *La normale au point* M_1 *conjugué de* M *rencontre le grand axe en* N_1 *et le petit axe en* N'_1; *la tangente en* M_1 *rencontre le grand axe en* T_1 *et le petit axe en* T'_1. *Montrer que :*

1° *Le lieu du point de rencontre des droites* NN'_1 *et* N_1N' *est une ellipse.*

2° *Le lieu du point de rencontre des droites* TT'_1 *et* T_1T' *est une quartique.*

3° *Le lieu du point de rencontre des droites* NN'_1, TT'_1, *ainsi que le lieu du point de rencontre des droites* N_1N' *et* T_1T' *se composent chacun d'une hyperbole équilatère.*

4° *Le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire élevée à* TT' *en son milieu, est une kreuzcurve.*

5° *La perpendiculaire élevée à* NN' *en son milieu enveloppe une courbe fermée dont on demande d'évaluer l'aire.*

6° *La projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire précédente est une courbe du 6e degré dont on demande l'aire.*

7° *Les perpendiculaires élevées à* NN' *et* $N_1N'_1$ *en leurs milieux se rencontrent sur une courbe dont on demande l'aire.* (E. N. BARISIEN.)

Solution par M. V. CRISTESCO (Bucarest). Soient ($a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$) les

Digitized by Google

coordonnées de M, et $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$ celles de M_1. Les équations des tangentes et des normales en M et M_1 seront :

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1,\quad -\frac{x}{a}\sin\varphi+\frac{y}{b}\cos\varphi=1;$$

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2,\quad \frac{ax}{\sin\varphi}+\frac{by}{\cos\varphi}=-c^2;$$

et, par suite, les coordonnées des points où ces droites rencontrent les axes, sont :

$$T\left(\frac{a}{\cos\varphi},0\right),\quad T'\left(0,\frac{b}{\sin\varphi}\right);\quad T_1\left(-\frac{a}{\sin\varphi},0\right),\quad T'_1\left(0,\frac{b}{\cos\varphi}\right);$$

$$N\left(\frac{c^2\cos\varphi}{a},0\right),\quad N'\left(0,-\frac{c^2\sin\varphi}{b}\right);$$

$$N_1\left(-\frac{c^2\sin\varphi}{a},0\right),\quad N'_1\left(0,-\frac{c^2\cos\varphi}{b}\right).$$

1° Les équations des droites NN'_1, N_1N' sont respectivement :

$$ax-by=c^2\cos\varphi,\quad ax+by=-c^2\sin\varphi;\qquad (1),\ (2)$$

elles se rencontrent donc sur l'ellipse :

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{1}{2}c^4.$$

2° Les équations des droites TT'_1, T_1T' sont

$$(bx+ay)\cos\varphi=ab,\quad (bx-ay)\sin\varphi=-ab.\qquad (3).\ (4)$$

Leur point de rencontre décrit donc la quartique :

$$(b^2x^2-a^2y^2)^2-2a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)=0.$$

3° Si l'on élimine $\cos\varphi$ entre les équations (1) et (3), et $\sin\varphi$ entre les équations (2) et (4), on trouve que les lieux des points de rencontre des droites NN'_1, TT'_1 et N_1N', T_1T' sont les hyperboles équilatères :

$$abx^2\pm c^2xy-aby^2-c^2ab=0.$$

4° L'équation de la perpendiculaire élevée à TT' en son milieu, et celle de la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse sur la droite perpendiculaire précédente, sont respectivement

$$2(ax\sin\varphi-by\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi=a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi,\qquad (5)$$

$$bx\cos\varphi+ay\sin\varphi=0.\qquad (6)$$

Digitized by Google

L'équation (6) donne

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{bx}{ay},$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \frac{bx}{\pm\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{ay}{\mp\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}},$$

les signes se correspondant, en vertu de l'équation (6).

En portant ces valeurs dans l'équation (5), on obtient la kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

5° L'équation de la perpendiculaire élevée à NN′ en son milieu, est :

$$2ab\,(bx\cos\varphi + ay\sin\varphi) + c^2(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi) = 0. \qquad (7)$$

La dérivée par rapport à φ est :

$$2ab\,(-bx\sin\varphi + ay\cos\varphi) + 2c^2(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0. \qquad (8)$$

Les coordonnées d'un point de l'enveloppe seront donc :

$$x = \frac{c^2}{2ab^2}[a^2+2b^2-(a^2+b^2)\cos^2\varphi]\cos\varphi,$$

$$y = -\frac{c^2}{2a^2b}[2a^2+b^2-(a^2+b^2)\sin^2\varphi]\sin\varphi.$$

La différentielle de l'aire A de cette courbe est ydx, ou

$$\frac{c^4}{4a^3b^3}[2a^2+b^2-(a^2+b^2)\sin^2\varphi][a^2+2b^2-3(a^2+b^2)\cos^2\varphi]\sin^2\varphi d\varphi.$$

En remplaçant $\cos^2\varphi$ par $1-\sin^2\varphi$, on trouve pour l'aire totale A :

$$A = \frac{c^4}{a^3b^3}\left[4(a^2+b^2)(2a^2+b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi - \right.$$

$$\left.(2a^2+b^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi - 3(a^2+b^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi\right].$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32}.$$

Digitized by Google

Donc

$$A = \frac{\pi c^4}{32a^5b^5}(a^4 + 10a^2b^2 + b^4) = \frac{3\pi c^4}{8ab} + \frac{\pi(a^2 - b^2)^4}{32a^5b^5}.$$

6° L'équation de la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse sur la droite (7) est

$$ax \sin\varphi - by\cos\varphi = 0. \qquad (9)$$

L'équation (9) donne

$$\sin\varphi = \frac{by}{\pm\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{ax}{\pm\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}$$

les signes se correspondant. En remplaçant dans (7), on trouve que le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire élevée à NN′ en son milieu, a pour équation

$$4(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) - c^4(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

En passant aux coordonnées polaires, on a

$$\rho^2 = \frac{c^4}{4}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

L'aire d'un secteur étant $\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta$, l'aire totale sera

$$A = \frac{c^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}d\theta,$$

ou

$$A = \frac{c^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} - 2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} +$$

$$2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}. \qquad (10)$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2ab}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2a(a+b)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{1}{a^2 - b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta -$$

Digitized by Google

$$\frac{b^2}{a^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\frac{\pi(a+2b)}{4a(a+b)^2}.$$

En remplaçant dans l'égalité (10), et faisant toutes les réductions, on trouve :

$$A=\frac{\pi(a-b)^2(a^2+b^2)}{4ab(a+b)}.$$

7° Les équations des perpendiculaires élevées à NN′ et N_1N_1' en leurs milieux, sont respectivement :

$$2ab(bx\cos\varphi+ay\sin\varphi)+c^2(a^2\sin^2\varphi-b^2\cos^2\varphi)=0,$$

$$2ab(bx\sin\varphi-ay\cos\varphi)-c^2(a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi)=0.$$

Les coordonnées d'un point de leur intersection sont donc :

$$x=\frac{c^2}{2ab^2}[a^2-(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi](\cos\varphi-\sin\varphi),$$

$$y=-\frac{c^2}{2a^2b}[a^2-(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi](\cos\varphi+\sin\varphi).$$

La différentielle de l'aire d'un secteur de la courbe sera donc :

$$\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{c^4}{8a^2b^2}[a^4+b^4-2(a^4-b^4)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-2(a^2+b^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi]d\varphi.$$

L'aire totale A s'obtiendra en faisant varier φ de 0 à 2π ; elle sera donc :

$$A=\frac{c^4}{8a^2b^2}\Big[(a^4+b^4)\int_0^{2\pi}d\varphi-2(a^4-b^4)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$-2(a^2+b^2)^2\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\Big].$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=0,\quad\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$A=\frac{\pi c^4}{16a^2b^2}(3a^4-2a^2b^2+3b^4)=\frac{\pi c^4}{4ab}+\frac{3\pi(a^2-b^2)^4}{16a^2b^2}.$$

Digitized by Google

Question 1916.

(Voir *Mathesis*, 2, IX, p. 104).

Etant donnée une ellipse, soient F ***un des foyers,*** MM′ ***une corde quelconque passant par*** F, I ***le milieu de cette corde*** MM′, K ***et*** K′ ***les foyers de l'ellipse lieu du point*** I, K ***étant le foyer le plus rapproché de*** F. ***Démontrer les relations :***

$$MM' + 2IK' = \textit{constante}, \quad MM' - 2IK = \textit{constante}.$$

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Soons. L'ellipse donnée ayant pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

si nous appelons x' et x'' les abscisses de M et M′, celle de I sera $x_1 = \frac{1}{2}(x' + x'')$ et nous aurons

$$MF = a - \frac{cx'}{a}, \quad M'F = a - \frac{cx''}{a};$$

d'où

$$MM' = 2a - \frac{2cx_1}{a}.$$

L'équation du lieu du point I étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 - b^2cx = 0,$$

cette courbe est une ellipse, dont les axes sont c, $\frac{cb}{a}$ et dont le centre a pour coordonnées $\frac{1}{2}c$, 0 ; on a donc

$$IK' = \frac{c}{2} + \frac{c}{a}\left(x_1 - \frac{c}{2}\right);$$

ce qui donne l'égalité

$$MM' + 2IK' = 2a - \frac{2cx_1}{a} + c + \frac{2c}{a}\left(x_1 - \frac{c}{2}\right) = 2a + c - \frac{c^2}{a}.$$

De ce que IK′ + IK = constante, on déduit la seconde relation.

Ont résolu la même question MM. Emmerich, Deprez et Droz Farny.

Digitized by Google

Question 1258.

(*Mathesis*. (2) X, p. 56).

Dans un triangle isoscèle ABC, *de base* BC, *représentons par* h *la hauteur issue de* A, *et par* H *les hauteurs égales issues des sommets* B *et* C. *Suivant que l'angle* A *est supérieur ou inférieur à un droit*, H^2 *est supérieur ou inférieur à* $2h^2$. (Droz-Farny).

Cette question a été résolue par MM. Barisien, Cataldi, Couturier, Delahaye, Descans, Emmerich, Fairon, François, Lafontaine (Liège), Lebougq (Gand), Rose, Cl. Thiry et Andrien.

Ces solutions emploient la trigonométrie ou le théorème de Pythagore généralisé. La proposition admet cependant une démonstration très élémentaire. Soit D le milieu de BC; en égalant deux expressions de la surface ABC, on obtient

$$\frac{H}{h} = \frac{2BD}{AB}. \qquad (1)$$

Si l'on construit sur BC le triangle rectangle isoscèle A'BC, on a

$$\frac{H}{h} = \frac{2BD}{A'B} = \sqrt{2}.$$

Suivant que $A > 90°$ ou $< 90°$, on a $AD < A'D$ ou $> A'D$, $AB < A'B$ ou $> A'B$, et par suite

$$\frac{H}{h} = \frac{2BD}{AB} > \frac{2BD}{A'B} \text{ ou } < \frac{2BD}{A'B}.$$

M. Emmerich prend le symétrique F de D par rapport à AB et obtient ainsi un triangle isoscèle ADE ayant pour côtés $AD = AF = h$, $DF = H$; l'angle $EAD = BAC$. Il applique à ce triangle le théorème de Pythagore généralisé on plutôt le corollaire d'après lequel on a $a^2 > b^2 + c^2$, $= b^2 + c^2$ ou $< b^{2\prime} + c^2$ suivant que $A > 90°$, $= 90°$ ou $< 90°$.

M. Emmerich examine aussi le rapport $tg^2 H : 2\, tg^2 h$ dans le triangle isoscèle sphérique.

Digitized by Google

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours de 1900.

I. Dans le plan (P) d'une section plane d'une surface (E), pour trouver les normales à la section issues d'un point O, on peut employer la méthode suivante : couper (E) par une sphère (S), et déterminer le rayon r de la sphère de façon que le plan (P) soit tangent au cône (C) qui a pour sommet le point O et pour directrice l'intersection (E, S). La génératrice de contact OG est normale à la section plane au point G où elle rencontre la directrice (E, S) du cône (C).

Justifier la méthode.

II. *Première application.* On coupe l'ellipsoïde

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

par le plan

$$\text{(P)} \qquad ux+vy+wz=0.$$

Sur le diamètre perpendiculaire, on porte à partir du centre une longueur OM dont le carré soit moyenne harmonique entre les carrés des demi-axes α et β de la section :

$$\frac{2}{\overline{OM}^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}.$$

Lieu du point M, quant (P) pivote autour du point O.

III. *Deuxième application.* Même problème en remplaçant la longueur OM par la longueur ON déduite de la formule

$$\frac{1}{ON}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}.$$

Etudier la forme du lieu du point N, et celle des sections parallèles aux trois plans des coordonnées.

On conservera les notations indiquées.

QUESTIONS D'EXAMEN.

950. La somme des carrés de quatre termes d'une équidifférence est une somme de trois carrés. (DE ROCQUIGNY.)

C'est l'interprétation de l'identité

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2+(\alpha+\beta)^2=(2\alpha)^2+(\beta+\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2.$$

Digitized by Google

951. Dans tout quadrilatère convexe ABCD,

$$\sin A\,[\sin B + \sin C - \sin (A + D)]\,[\sin C + \sin D - \sin (C + D)]$$
$$= \sin C\,[\sin A + \sin B - \sin (C + D)]\,[\sin A + \sin D - \sin (A + D)].$$

(DAVIS.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1973. Soient AA'A''..., BB'B''..., deux génératrices opposées sur un cylindre circulaire droit, ABA'B'A''B''... un arc d'hélice; (A),(A');... (B), (B')... les plans perpendiculaires à l'axe passant par les points A, A',... B, B',...

On demande les perspectives de l'hélice sur les plans (A'), (A''),.. (B), (B'), (B''),... selon que le point de vue est 1° en A, 2° au centre O de la base située dans le plan (A). (H. BROCARD.)

×**1974.** On projette un point quelconque M du plan d'un triangle ABC en P_a, P_b, P_c sur les côtés BC, CA, AB, et en Q_a, Q_b, Q_c sur les hauteurs AA', BB', CC'. Démontrer que les droites P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c concourent en un même point; ces droites sont parallèles lorsque M appartient à la circonférence des neuf points du triangle ABC.

(SPORER.)

Généraliser cette proposition par voie de perspective et démontrer directement le théorème généralisé par la géométrie projective ou analytiquement.

Enoncer la proposition corrélative. (J. N.)

1975. Soient a_1, a_2, a_3,... des nombres qui tendent vers une limite a. Démontrer que

$$\lim_{n=\infty} (a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \cdots a_n^{u_1}) = a^s,$$

s étant la limite de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ (E. CESÁRO.)

1976. Étant données une hyperbole équilatère dont $\overline{AB}$ est l'axe transverse et une parabole ayant pour foyer le centre de l'hyperbole et pour directrice la tangente au sommet B, une tangente mobile de la parabole coupe l'hyperbole aux points H_1, H_2 : on demande l'enveloppe des ellipses qui ont H_1H_2 pour diamètre et passent par les deux points fixes A, B. (V. RETALI.)

Digitized by Google

SUR LES TRIANGLES TRIHOMOLOGIQUES;

par M. J. A. THIRD.

1. Considérons deux triangles trihomologiques ABC et A'B'C', c'est-à-dire tels que les droites AA', BB', CC' concourent en un point S_1; que les droites AB', BC', CA' concourent en un point S_2; et que les droites AC', BA', CB' concourent en un point S_3. Les droites BC, CA, AB seront alors rencontrées par les droites B'C', C'A', A'B' en trois points D_1, E_1, F_1 situés sur une même droite u_1; par les droites C'A', A'B', B'C' en trois points D_2, E_2, F_2 d'une même droite u_2; par les droites A'B', B'C', C'A' en trois points D_3, E_3, F_3 d'une même droite u_3.

Cela posé, 1° il existe une conique Σ_1 qui touche les droites AD_1, BE_1, CF_1 aux points A, B, C et qui passe par les points S_2, S_3; 2° il existe une conique σ_1 qui touche BC, CA, AB aux points D_1, E_1, F_1 et qui est également tangente aux droites u_2, u_3.

Ces propositions étant corrélatives, il suffira de démontrer la première. Si l'on remplace A'B'C' par B'C'A' ou par C'A'B'. on trouve deux coniques Σ_2, Σ_3 analogues à Σ_1, et deux coniques σ_2, σ_3, analogues à σ_1.

Prenons ABC comme triangle de référence, et soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées des points A', B', C'.

En exprimant que les droites AA', BB', CC' sont concourantes, de même que les droites AB', BC', CA', on trouve

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2, \qquad (1)$$

et la forme de ces égalités montre que les droites AC', BA', CB' concourent également en un même point.

Des relations (1) on conclut

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{\beta_1\gamma_2} : \frac{1}{\gamma_1\alpha_2} : \frac{1}{\alpha_1\beta_2}. \qquad (2)$$

Il en résulte qu'on peut prendre pour les coordonnées des centres d'homologie :

$S_1, (\gamma_1\alpha_2, \beta_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_2)$; $S_2, (\alpha_1\beta_2, \beta_1\beta_2, \beta_1\gamma_2)$; $S_3, (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2, \gamma_1\alpha_2)$;

puis, que les axes d'homologie ont pour équations :

$$\frac{x}{\alpha_1\beta_2(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)} + \frac{y}{\alpha_1\beta_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)} + \frac{z}{\gamma_1\gamma_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)} = 0, \quad \text{etc.}$$

Digitized by Google

On trouve ensuite pour l'équation de la conique Σ_1 circonscrite au triangle ABC et touchant les droites AD_1, BE_1, CE_2 :

$$\frac{\alpha_1\beta_2(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)}{x} + \frac{\alpha_1\beta_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)}{y} + \frac{\gamma_1\gamma_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}{z} = 0.$$

On voit immédiatement que cette courbe passe par les points S_2, S_3.

3. Passons à quelques corollaires ou cas particuliers.

A. Le théorème suivant est évidemment compris dans le théorème général : si une conique variable σ touche les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC en X, Y, Z, et touche une droite fixe u qui coupe BC, CA, AB en D, E, F, le lieu du point S, où AX, BY, CZ concourent, est la conique Σ circonscrite à ABC et touchant AD, BE, CF.

Si nous projetons u à l'infini, σ se transforme en une parabole ; AD, BE, CF deviennent parallèles à BC, CA, AB, et, par suite, Σ devient l'ellipse de Steiner de ABC ; ce qui nous donne le théorème suivant :

Si une parabole variable touche les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points X, Y, Z, le lieu du point de concours S de AX, BY, CZ est l'ellipse de Steiner du triangle (*).

Signalons ici un autre cas particulier :

Soit u la quatrième tangente commune de deux cercles qui touchent les côtés de ABC, et désignons par D, E, F les points où u rencontre BC, CA, AB ; la conique circonscrite à ABC et touchant AD, BE, CF passe par les deux points de Gergonne correspondants. Cette conique a pour centre le milieu de l'un des côtés de ABC.

B. Si le triangle A'B'C' du cas général, se réduit à trois points situés sur une même droite u, les axes u_1, u_2, u_3 coïncident avec u, et les coniques Σ_1, Σ_2, Σ_3 se confondent ; ce qui nous donne le théorème suivant :

Soit Σ une conique circonscrite à un triangle ABC, et soit u la droite passant par les points où les tangentes à Σ menées par les sommets coupent les côtés opposés. Les droites qui joignent A, B, C à un point quelconque S_1 de Σ rencontrent u en trois point A', B', C', tels que les droites AB', BC', CA' concourent en un point S_2 de Σ et que les droites AC', BA', CB' se rencontrent en un point S_3 de Σ.

(*) Voir *Theorie der Kegelschnitte* (Steiner-Schröter, 1867), p. 287, où cette propriété est signalée.

Digitized by Google

Si l'on projette u à l'infini, Σ devient l'ellipse de Steiner de ABC, et l'on a la théorème suivant :

Si S_1 est un point quelconque situé sur l'ellipse de Steiner de ABC, les parallèles à AS_1, BS_1, CS_1, par C, A, B, concourent en un point S_2, et les parallèles à AS_1, BS_1, CS_1 par B, C, A concourent en un second point S_3, et S_2 et S_3 se trouvent sur l'ellipse(*).

C. Si les sommets de A, B, C, du cas général, coïncident en un point S, les centres d'homologie S_1, S_2, S_3 coïncident évidemment avec S, et les coniques σ_1, σ_2, σ_3, se confondent; ce qui nous donne le théorème suivant, corrélatif au théorème B.

Soit Σ une conique circonscrite à un triangle ABC; désignons par D, E, F les points de rencontre des côtés BC, CA, AB avec les tangentes à Σ menées par les sommets opposés. S étant un point quelconque de Σ, appelons M et N′ les points où SD coupe CA et AB, N et L′ les points où SE coupe AB et BC, et L et M′ les points où SF coupe BC et CA. Les points L, M, N, L′, M′, N′ se trouveront sur deux droites tangentes à la conique σ qui touche les côtés de ABC aux points où ils sont rencontrés par les droites AS, BS, CS.

Si l'on projette u à l'infini, Σ devient l'ellipse de Steiner et σ une parabole. On obtient alors le théorème suivant :

Par un point quelconque S de l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC, menons des parallèles aux côtés. La parallèle à BC coupant CA, AB en M et N′, la parallèle à CA coupant AB, BC en N et L′, et la parallèle à AB coupant BC, CA en L et M′, les six points L, M, N, L′, M′, N′ sont situés sur deux droites(**), ces droites sont des tangentes à la parabole qui touche les côtés de ABC aux points où ils sont rencontrés respectivement par les droites AS, BS, CS.

Parmi les applications que l'on peut faire de la proposition fondamentale à la géométrie brocardienne du triangle, nous signalons ici la suivante :

Soit A′B′C′ le premier triangle de Brocard de ABC, et désignons par D, E, F les points (situés sur une même droite) où B′C′, C′A′, A′B′ coupent BC, CA, AB respectivement: 1° DA′, EB′, FC′ sont des tangentes

---

(*) Cette propriété a été signalée par M. Neuberg (*Mathesis* (2) V, p. 199), et J. M. S, 1886. p. 51.

(**) M. Neuberg a signalé cette partie du théorème dans *Mathesis*, t. II, p. 42.

Digitized by Google

au cercle de Brocard de ABC, et 2° DA, EB, FC sont des tangentes à la conique passant par les sommets de ABC et les points de Brocard.

×DIVISION D'UN ANGLE EN n PARTIES ÉGALES

Une nouvelle et une vieille solution.

I.

Soit $ACB = \alpha$ un angle à diviser en n parties égales, n étant impair. (Le lecteur est prié de faire la figure). Décrivons autour du sommet C un arc ADB de circonférence avec un rayon quelconque $CA = CB$. Sur la bissectrice CD de l'angle portons, à partir de D, le tiers DF de la flèche DE de l'arc ADB et décrivons la circonférence concentrique passant par F. Portons sur CB, CA des longueurs $CH = CG = \frac{1}{n} CA$ et joignons GH. Projetons GH sur AB en G_1, H_1; les droites projetantes GG_1 et HH_1 rencontreront la seconde circonférence respectivement en G_2 et H_2. Alors G_2CH_2 sera à peu près la $n^{ième}$ partie de α.

Pour faire l'analyse de cette construction, supposons $CA = CB = 1$, par conséquent,

$$CG = CH = \frac{1}{n}, \quad GH = \frac{2}{n} \sin \frac{1}{2}\alpha.$$

D'ailleurs, on a $DE = 1 - \cos \frac{1}{2}\alpha$; partant

$$DF = \frac{1}{3}(1 - \cos \tfrac{1}{2}\alpha), \quad CF = \frac{1}{3}(2 + \cos \tfrac{1}{2}\alpha)$$

Soit $G_2CH_2 = \beta$; il viendra

$$\sin \frac{1}{2}\beta = \frac{3 \sin \frac{1}{2}\alpha}{n(2 + \cos \frac{1}{2}\alpha)},$$

ou enfin

$$(1) \qquad \beta = 2 \arcsin \frac{3 \sin \frac{1}{2}\alpha}{n(2 + \cos \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Le développement en série de la fraction $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ étant

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = x - \frac{1}{180}x^5 - \frac{1}{1512}x^7 \ldots,$$

Digitized by Google

on en tire

$$\beta = 2 \arcsin \frac{1}{n} \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^5}{5760} \cdots \right\},$$

au lieu de

$$(2) \qquad \beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^3}{24n^3} - \frac{\alpha^5}{5760n} + \frac{3\alpha^5}{640n^5} + \cdots$$

Si α n'est pas grand, on fera donc une petite erreur en posant $\beta = \frac{\alpha}{n}$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ et $n = 3, 5, 7$ on obtient, à l'aide de la formule (1), les angles :

$$\beta_{(5)} = 30°16'59'', \quad \beta_{(5)} = 18°2'0'', \quad \beta_{(7)} = 12°51'37'',$$

au lieu des valeurs exactes respectivement 30°, 18°, 12° 51′ 52″,7.

Avec $\alpha = \pi$, on obtient $\beta_{(5)} = 60°$ (exact), mais

$$\beta_{(5)} = 34° 54' 54'',6 \quad \text{et} \quad \beta_{(7)} = 24° 44' 50''$$

au lieu de 36° et de 25° 42′ 51″,4 respectivement (Solution communiquée à M. le Prof. E. Lampe, par un praticien).

II.

La solution pratique la plus élégante du problème de la division d'un angle en n parties égales s'obtient au moyen de la courbe imaginée par Hippias d'Elis, pour la trisection, au V^e siècle avant notre ère : Tracez un angle droit YOX. Divisez en 2^n parties égales, OY = 1 et l'angle YOX; projetez le point M, qui correspond sur OY à k des 2^n parties de OY, parallèlement à OX, en m sur le second côté Om de l'angle XOm qui est égal à k des 2^n parties de l'angle droit. Le lieu des points m est la *courbe d'Hippias* (appelée aussi *quadratrice de Dinostrate*, parce qu'elle coupe OX à une distance égale à $(2 : \pi)$; on la construit facilement point par point.

Pour diviser un angle XOm en n parties égales, prenez sur OY une longueur OP égale à $\frac{1}{n}$ OM; projetez P, parallèlement à OX, en p sur la courbe d'Hippias. L'angle POX sera égal à la $n^{ième}$ partie de XOm.

(P. M.)

Digitized by Google

NOTRE SUPPLÉMENT.

Notre supplément contient deux mémoires. Le premier par V. Retali, *sur une transformation géométrique* a été suscité par le travail de M. Brocard publié en supplément à la livraison de mars 1898 de *Mathesis*. Il est précédé d'une introduction historique complète. L'autre dû à M. G. Tarry, *sur les permutations carrées de base* 6 traite une question assez curieuse dont voici les antécédents. La question 453 de *l'Intermédiaire des Mathématiciens* (1895), due à M. E. Maillet, est formulée ainsi :

« Dans les *Mémoires de la Société de Flessingue*, Euler n'a pu trouver de solution pour ce qu'il appelle le problème des 36 officiers, sans cependant montrer qu'il n'y avait aucune solution. A-t-on trouvé une solution ou montré qu'il n'y en avait aucune?

Voici l'énoncé de ce problème : « Cette question roulait sur une assemblée de 36 officiers de 6 grades différents et tirés de 6 régiments différents qu'il s'agissait de ranger dans un carré de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât 6 officiers tant de différents grades que de régiments différents. » On le cite dans les *Récréations math.* de Lucas, Introduction, p. 13, t. I; dans l'ouvrage de M. Arnoux. *Sur les espaces arithmétiques hypermagiques*, etc. p. 5.

M. Laugel (I. M., 1896, p. 17) conjecture que le problème est impossible pour $4n^2$ officiers, et que l'on devrait chercher la démonstration de ce fait dans la théorie des substitutions. Il ajoute que le problème est toujours possible si le nombre est impair et que la construction du carré dépend simplement de l'application méthodique de substitutions circulaires. Ainsi, si $a, b, c, \ldots$ désignent les grades différents des officiers et que les indices $1, 2, 3, \ldots$ marquent les numéros de leurs régiments, le tableau suivant représente une solution du problème des 25 officiers :

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ b_5 & c_1 & d_2 & e_3 & a_4 \\ c_4 & d_5 & e_1 & a_2 & b_3 \\ d_3 & e_4 & a_5 & b_1 & c_2 \\ e_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_1 \end{array}$$

M. Brocard (I. M., 1896, p. 90) donne la note bibliographique suivante : « Le problème des 16, 25 et 49 officiers a été proposé et résolu

Digitized by Google

dans le journal *Le Siècle*, par M. A. Feisthamel (oct. et nov. 1884). Le rédacteur, reproduisant le passage cité d'Ed. Lucas, a dit que ses recherches pour le nombre 36 étaient demeurées infructueuses. Celui des 64 officiers a été proposé et résolu par M. B. Meyniel (nov. 1884). Voir aussi, dans les *Tablettes du chercheur*, les remarquables solutions données par M. Huber pour 16, 25, 49, 64 et 81 officiers (1894, questions 1678, 1897, 1872, 1845 et 1535) ».

M. Barbette, de Liége (I. M., 1898, p. 83) généralise le problème en considérant $m^2 = [2^k(2p+1)]^2$ officiers de m grades différents et de m régiments différents, qu'il s'agit de disposer en carré de manière à remplir certaines conditions, et donne les tableaux représentatifs de quelques solutions particulières. M. Heffter (I. M., 1898, p. 176) indique une solution très simple pour le cas de $(2p+1)^2$ officiers; mais comme l'ont fait remarquer MM. Delannoy et Barbette (I. M., 1898, p. 252), cette solution ne s'applique plus à $4n^2$ officiers.

M. G. Tarry (I. M., 1899, p. 251) limite l'impossibilité du problème à l'hypothèse de $4(2p+1)^2$ officiers. Dans une seconde note (I. M., 1900, p. 14), il donne un aperçu de sa démonstration pour établir l'impossibilité du problème des 36 officiers. (J. N.).

---

*SUR UNE FORMULE COMBINATOIRE[1].

Soit à calculer la valeur de la différence

$$\Delta = (2n+1)\left\{C_{2n+1}^{n} - \frac{1}{3}C_{2n+1}^{n-1} + \frac{1}{5}C_{2n+1}^{n-2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{0}\right\}$$
$$- 8n\left\{C_{2n-1}^{n-1} - \frac{1}{3}C_{2n-1}^{n-2} + \frac{1}{5}C_{2n-1}^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{0}\right\},$$

où $C_p^r = C_p^{p-r}$ désigne le nombre des combinaisons de p objets r à r, ou $p-r$ à $p-r$.

On peut écrire

$$\Delta = \left[(2n+1)C_{2n+1}^{n} - 8n\,C_{2n-1}^{n-1}\right] - \frac{1}{3}\left[(2n+1)C_{2n+1}^{n-1} - 8nC_{2n-1}^{n-2}\right] + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left[(2n+1)C_{2n+1}^{1} - 8n\,C_{2n-1}^{0}\right] + (-1)^n C_{2n+1}^{0}.$$

---

(1) Voir *Mathesis*, 1899, (2), IX, pp. 32 et 237-238, Question 1208.

Digitized by Google

Or, on a successivement

$$(2n+1)C_{2n+1}^{n-k} - 8n\,C_{2n-1}^{n-k-1} = C_{2n+1}^{n-k}\left[2n+1-\frac{8n(n+k+1)(n-k)}{2n(2n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n-k}\left[(2n+1)^2-4(n+k+1)(n-k)\right]=\frac{(2k+1)^2}{2n+1}C_{2n+1}^{n-k}.$$

D'après cette formule, on trouve

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n+1}^{n} - 3\,C_{2n+1}^{n-1} + 5\,C_{2n+1}^{n-2} - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}(2n-1)\,C_{2n+1}^{1} + (-1)^n(2n+1)\,C_{2n+1}^{0}.$$

On peut transformer le second membre, en se servant de la relation connue et d'ailleurs facile à vérifier,

$$C_{2n+1}^{k} = C_{2n}^{k} + C_{2n}^{k-1}. \qquad (1)$$

On trouve ainsi

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n}^{n} + C_{2n}^{n-1} - 3\,(C_{2n}^{n-1} + C_{2n}^{n-2}) + 5\,(C_{2n}^{n-2} + C_{2n}^{n-3}) - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}(2n-1)\left[C_{2n}^{1} + C_{2n}^{0}\right] + (-1)^n(2n+1)\,C_{2n+1}^{0}$$

ou encore, en réduisant et observant que

$$C_{2n+1}^{0} = C_{2n}^{0} = 1,$$

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n}^{n} - 2\,C_{2n}^{n-1} + 2\,C_{2n}^{n-2} - \cdots + (-1)^n\,2\,C_{2n}^{0}.$$

Appliquant de nouveau aux termes du second membre la formule (1), on obtient la relation

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n-1}^{n} + C_{2n-1}^{n-1} - 2\,(C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^{n-2}) + 2\,(C_{2n-1}^{n-2} - C_{2n-1}^{n-3}) - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\,2\,(C_{2n-1}^{1} + C_{2n-1}^{0}) + (-1)^n 2C_{2n}^{0},$$

et, enfin, après réduction,

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n-1}^{n} - C_{2n}^{n-1} = 0,$$

ou $\Delta = 0$(*). (P. M.)

(*) Dans un article ultérieur, nous déduirons de cette relation l'aire totale des *sinusoïdes impaires*.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen: *Erster Teil.* Die analytische Geometrie der Ebene von Dr GANTER, Professor an der Kantonsschule in Aarau und Dr RUDIO, Professor am Polytechnikum in Zürich, 4te Auflage. Leipzig, Teubner, 1900 (VIII-180 p. in 8°, Prix : 3 marcs). *Zweiter Teil.* Die analytische Geometrie des Raumes von Dr RUDIO, 2te Auflage. Leipzig, Teubner, 1900 (VI-184 p. in 8°. Prix : 2 marcs 40).

Comme le titre l'indique, les auteurs n'ont voulu exposer que les *éléments* de la géométrie analytique, et leur programme ne va guère au-delà de ce qu'exige une première étude de cette science et de ce qui est nécessaire aux élèves des écoles spéciales allemandes pour pouvoir aborder la mécanique et les sciences techniques. Cependant, leur ouvrage présente, dans ces limites, un caractère scientifique qui manque souvent dans des livres plus étendus. Par exemple, les signes des grandeurs géométriques: segments, angles, aires et volumes, y sont exposés avec toute la rigueur désirable. De même, on y rencontre des développements sur le rapport anharmonique, les formes harmoniques, l'involution, les figures affines, la théorie des transversales, les axes radicaux, la théorie des pôles et polaires.

Les propriétés des sections coniques, de l'ellipsoïde, des deux hyperboloïdes et des deux paraboloïdes sont exposées au moyen des équations réduites.

L'équation générale à deux ou trois variables est entièrement laissée de côté.

Les exercices, au nombre de plus de 400 pour chacune des deux parties, forment un complément utile; ce sont des applications numériques ou des cas particuliers des formules générales. (J. N.)

Elemente der darstellenden Geometrie von Dr RUDOLF STURM, Professor an der Universität zu Breslau. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. Leipzig, Teubner, 1900 (VI-157 p. avec 61 figures dans le texte et 7 planches lithographiées). Prix : 5 marcs 60.

La première édition de cet ouvrage s'adressait spécialement aux élèves des écoles techniques allemandes. L'édition actuelle a surtout en vue à ceux qui se destinent à l'enseignement moyen en Allemagne. Les nouveaux règlements rangent les éléments de géométrie descriptive parmi les matières obligatoires pour les candidats aux fonctions de professeur de *mathématiques appliquées* dans les Ecoles réales ou professionnelles; mais, chose singulière, cette science n'est pas exigée de ceux qui aspirent à enseigner les *mathématiques pures*.

L'ouvrage de M. Sturm se distingue des manuels français par l'introduction de notions préparatoires à l'étude de la géométrie supérieure, notions qui se présentent naturellement dans les épures. Nous faisons ici allusion à l'affinité, à l'homo-

Digitized by Google

logie, aux propriétés projectives générales ou spéciales, au principe de dualité et aux éléments à l'infini.

La table des matières que nous allons résumer, suffit pour indiquer quel est le programme développé par M. Sturm.

Introduction (Projection centrale. Éléments qui n'ont pas de projection proprement dite; éléments à l'infini). Chap. I. Projection orthogonale sur un plan unique; rabattements et affinité; éléments parallèles. Chap. II. Projections sur deux plans. Chap. III. Problèmes. Chap. IV. Rotations. Chap. V. Changement de plans de projections. Chap. VI. Polyèdres. Sections planes; situation perspective; homologie. Pénétration de deux polyèdres. Développements de polyèdres. Chap. VII. Perspective. Chap. VIII. Projections obliques. Chap. IX. Axonométrie. Chap. X. Ombres et éclairement.

Histoire des mathématiques par J. Boyer. Illustrée de fac-similés de manuscrits et de portraits. Paris, Carré et Naud, 1900 (XI-260 p. in-8, cartonné). Prix : 5 fr.

Livre amusant, mais superficiel et souvent inexact (Voir les comptes rendus de M. G. Loria. dans son *Bollettino*, 1900, pp. 10-12; de M. Cantor, dans la H.-L. Abteilung de la *Zeitchrift für Math. und Physik*, 1900, pp. 98-99; et de M. Eneström, dans la *Bibliotheca mathematica*, 1900, pp. 278-280.) On y trouve des portraits de Carnot, Cauchy, Descartes, M^me^ du Chatelet, Euler, Fermat, Galois, Sophie Kovalevsky, Lagrange, Laplace, Leibniz, Lobatchefsky, Monge, Neper, Newton, Pascal, Saunderson, Viète et Weierstrass. (P. M.)

---

1. **Histoire abrégée de l'astronomie** par E. Lebon, agrégé de l'Université etc. Avec seize portraits. Paris, Gauthier-Villars, 1899 (VII-288 pp. in 8°). Prix : 8 fr.

2. **L'évolution de l'Astronomie chez les Grecs** par J. Thirion, S. J. professeur de physique au Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain. Bruxelles, rue impériale, 20, Lagaert (In 12, 286 pp). Prix : 3 fr.

« Nous avons exposé sobrement les observations faites pendant la période ancienne (avant Copernic), dit M. Lebon, en tenant compte des résultats des recherches les plus récentes; avec plus d'étendue les nombreux travaux de la période moderne. et assez amplement, pensons-nous, les découvertes de l'astronomie physique et les recherches de l'astronomie mathématique pendant la période contemporaine. »

Nous souscrivons bien volontiers à cette appréciation pour la partie de l'histoire de l'astronomie qui commence à Newton (p. 40), en ajoutant que l'exposition de M. Lebon est claire et intéressante. Mais pour l'histoire de l'ancienne astronomie, celle qui explique les mouvements des astres par des combinaisons de mouvements circulaires, son livre devrait être refait au moyen de celui du P. Thirion. Celui-ci expose vraiment d'après les travaux les plus récents (surtout ceux de

Digitized by Google

Schiaparelli), les vues ou systèmes de Pythagore, Philolaus, Platon, Eudoxe, Héraclite du Pont, Aristarque, Hipparque et Ptolémée et fait connaître le vrai point de vue auquel il faut se placer pour apprécier l'œuvre de Copernic. Les portraits qui ornent le livre de M. Lebon sont ceux de Copernic, Galilée, Kepler, Newton, Herschel, Laplace, Arago, Leverrier, Faye, Janssen, Lœwy, Perrier, Newcomb, Tisserand, Sophie Kovalevsky, Poincaré. A la fin de l'ouvrage, il y a un dictionnaire biographique et bibliographique de 45 pages où l'on trouve des renseignements sommaires sur beaucoup d'astronomes et de météorologistes et même de mathématiciens purs. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1085.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, page 216).

Soient P_aBC, P_bCA, P_cAB *trois triangles isoscèles semblables construits sur les côtés d'un triangle donné. Les triangles homologiques* $P_aP_bP_c$, ABC *sont polaires réciproques par rapport à une certaine conique* Σ. *Démontrer que lorsque l'angle* P_aBC *varie, la courbe* Σ *engendre un système homofocal.* (J. Neuberg).

Solution par M. Mandart. Si θ désigne l'angle P_aBC, les coordonnées des points P_a, P_b, P_c sont

$$-\sin\theta, \quad \sin(C+\theta), \quad \sin(B+\theta);$$

$$\sin(C+\theta), \quad -\sin\theta, \quad \sin(A+\theta);$$

$$\sin(B+\theta), \quad \sin(A+\theta), \quad -\sin\theta.$$

Or, si l'équation tangentielle d'une conique est

$$A_{11}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 + A_{33}\nu^2 + 2A_{12}\lambda\mu + 2A_{23}\mu\nu + 2A_{31}\lambda\nu = 0,$$

les coordonnées des pôles des côtés du triangle de référence sont (A_{11}, A_{12}, A_{13}), (A_{21}, A_{22}, A_{23}), (A_{31}, A_{32}, A_{33}). En comparant les coordonnées à celles des points P_a, P_b, P_c, on voit que l'équation de Σ est

$$-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\sin\theta + 2\lambda\mu\sin(C+\theta) + 2\mu\nu\sin(A+\theta) + 2\lambda\nu\sin(B+\theta) = 0;$$

Digitized by Google

on peut l'écrire ainsi

$$-\sin\theta(\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu\cos C-2\mu\nu\cos A-2\lambda\nu\cos B)$$
$$+2\cos\theta(\lambda\mu\sin C+\mu\nu\sin A+\lambda\nu\sin B)=0.$$

De cette forme on conclut que Σ touche les tangentes communes aux deux coniques

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu\cos C-2\mu\nu\cos A-2\lambda\nu\cos B=0,$$
$$\lambda\mu\sin C+\mu\nu\sin A+\lambda\nu\sin B=0,$$

dont l'une est l'ensemble des points cycliques, et l'autre l'ellipse qui touche les côtés du triangle de référence en leurs milieux. Par conséquent, les foyers de cette ellipse sont aussi les foyers de Σ.

M. Droz Farny a donné de la même question une démonstration géométrique très ingénieuse; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

×Question 1284.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 264).

Si $x^2+y^2=z^2$, x, y *et* z *étant entiers, les expressions*

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1},\quad z^{2n}-x^{2n}-y^{2n} \tag{1}$$

sont divisibles par $x+y+z$. (Graeber.)

Solution par M. Déprez. Toute solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ est de la forme

$$x=\alpha^2-\beta^2,\quad y=2\alpha\beta,\quad z=\alpha^2+\beta^2.$$

On en déduit

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=(\alpha^2-\beta^2)^{2n+1}+(2\alpha\beta)^{2n+1}+(\alpha^2+\beta^2)^{2n+1}.$$

Sous cette forme, on voit que la première des expressions (1) est divisible par $x+y+z=2\alpha(\alpha+\beta)$; car elle admet le facteur numérique 2 et s'annule pour $\alpha=0$ et pour $\alpha=-\beta$.

De même, en écrivant

$$z^{2n}-x^{2n}-y^{2n}=(\alpha^2+\beta^2)^{2n}-(\alpha^2-\beta^2)^{2n}-(2\alpha\beta)^{2n},$$

on trouve facilement que la seconde expression est divisible par $2\alpha(\alpha+\beta)$.

Digitized by Google

Solution par M. Plakhowo. On peut poser

$$x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta, \quad z = \alpha^2 + \beta^2,$$

d'où

$$xy = 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \quad x + y + z = 2\alpha(\alpha + \beta);$$

donc xy est divisible par $x + y + z$.

En considérant les expressions (1) comme des polynômes en z, on trouve pour les restes de leur division par $z + x + y$:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} - (x + y)^{2n+1}, \quad (x + y)^{2n} - x^{2n} - y^{2n}.$$

En développant $(x + y)^{2n+1}$ et $(x + y)^{2n}$ on voit que ces restes sont divisibles par xy et par suite, par $x + y + z$.

Solution par M. Soons. Sous la condition $x^2 + y^2 = z^2$ on trouve

$$(x + y + z)(x + y - z) = 2xy.$$

Or l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ exige que deux des nombres x, y, z soient impairs et le troisième pair ou que les trois soient pairs. Donc $x + y - z$ est divisible par 2, et par suite le produit xy est divisible par $x + y + z$.

Cela posé, on peut écrire :

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$$

$$= (x + y)\ (x^{2n} - x^{2n-1}y + \cdots) + z\,(x^{2n} + nx^{2n-2}y^2 + \cdots)$$

$$= (x + y)\ (x^{2n} + y^{2n} + \text{M}.\,xy) + z\,(x^{2n} + y^{2n} + \text{M}.\,xy)$$

$$= (x + y + z)\ (x^{2n} + y^{2n}) + \text{M}.\,xy = \text{M}\,(x + y + z);$$

$$z^{2n} - x^{2n} - y^{2n} = (x^2 + y^2)^n - (x^{2n} + y^{2n})$$

$$= (x^{2n} + nx^{2n-2}y^2 + \cdots) - (x^{2n} + y^{2n})$$

$$= \text{M}.\,x^2y^2 = \text{M}.\,(x + y + z)^2.$$

Solution par M. Emmerich. Posons $s_p = x^p + y^p - (-z)^p$; nous aurons l'identité $s_p = s_{p-2}\,s_2 + s_{p-2}\,z^2 - x^2y^2\,(x^{p-4} + y^{p-4}) - (-z)^{p-2}\,s_2$

Donc, si $s_2 = 0$,

$$s_p = s_{p-2}\,z^2 - x^2y^2\,(x^{p-4} + y^{p-4}). \qquad (1)$$

Or, sous la même condition $s_2 = 0$, on a

$$xy = \tfrac{1}{2}(x + y + z)(x + y - z);$$

donc puisque $x + y$ et z sont de même parité, le produit xy est multiple de $x + y + z$ et de $x + y - z$.

Cela posé, si l'on fait successivement $p = 4, 6, \ldots, n$ l'égalité (1) mon-

Digitized by Google

tre que les sommes $s_4, s_6, \ldots, s_{1n} = x^{2n} + y^{2n} - z^n$ sont divisibles par $(x+y+z)^2$ et par $(x+y-z)^2$.

Pour passer au second cas, considérons d'abord s_5. On a

$$s_5 = 3xyz + \Sigma x.\ (\Sigma x^2 - \Sigma xy)$$
$$= xy\,(3z - \Sigma x) + \Sigma x.\ (2z^2 - yz - zx)$$
$$= (2z - x - y)\,(xy + xz + yz + z^2).$$

La dernière parenthèse, à cause de $x^2 + y^2 = z^2$, peut prendre la forme

$$\tfrac{1}{2}\,(2xy + 2xz + 2yz + x^2 + y^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}\,\Sigma^2 x;$$

donc s_5 est divisible par $\frac{1}{2}\,(x+y+z)^2$. En s'appuyant ensuite sur l'identité (1), on voit que $s_5, s_7, \ldots$ sont divisibles par $\frac{1}{2}\,(x+y+z)^2$.

Si l'on change z en $-z$ on trouve que

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} - z^{2n+1} = \text{M}.\ \tfrac{1}{2}\,(x+y-z)^2.$$

On ne peut affirmer que s_{2n+1} est divisible par $(x+y+z)^2$, car $2z - x - y$ peut ne pas être divisible par 2.

Question 1243.

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 280).

On considère toutes les coniques semblables à une conique donnée, ayant un foyer donné et pour directrice correspondante une tangente à une circonférence donnée; démontrer que l'enveloppe de ces courbes est un ovale de Descartes. (J. Neuberg.)

Solution géométrique par M. G. Gérard. Soient F le foyer donné, O le centre de la circonférence donnée et R son rayon; appelons en outre k l'excentricité qui, d'après la condition de similitude, doit être constante ($k < 1, = 1, > 1$, selon l'espèce des coniques que nous considérons).

Soit maintenant M l'un des deux points d'intersection à distance finie, de deux courbes voisines du système; menons MF et projetons M en D et D′ sur les directrices correspondantes; nous aurons

$$k = \frac{\text{MF}}{\text{MD}} = \frac{\text{MF}}{\text{MD}'},$$

donc MD = MD′, et le point M se trouve sur la bissectrice de l'angle des

Digitized by Google

deux directrices; mais cette bissectrice passe aussi par le centre O de la circonférence donnée, à laquelle les directrices sont tangentes.

Dès lors, si les deux directrices sont données, il suffira, pour obtenir le point M, de déterminer leur point de rencontre I et de mener le rayon OI : ce rayon passera par M.

Cette construction subsiste encore quand la directrice ID′ s'approche indéfiniment de ID, et elle conduit alors au point caractéristique de la conique correspondant à ID; ce dernier point est donc à l'intersection de cette conique avec le rayon de contact OI de ID. Désignons-le par C; nous aurons $\frac{CF}{CI} = k$, d'où, en posant $CF = r$ et $CO = r'$:

$$\frac{r}{r' - R} = k, \quad \text{ou} \quad r - kr' + kR = 0.$$

Cette équation représente, en coordonnées bipolaires, l'enveloppe cherchée; comme elle est du premier degré en r et r', l'enveloppe est un ovale de Descartes.

Remarque. On peut considérer l'ovale de Descartes comme le lieu des points dont le rapport des distances CA : CA′ à deux cercles donnés O et O′ est constant; d'après Chasles, la droite AA′ passe par un point fixe S de la ligne des centres OO′, et les tangentes en A et A′ aux deux cercles se coupent sur la tangente en C à l'ovale(*). Il est facile de retrouver ces propriétés dans la présente question : les deux cercles fixes sont O et F (cercle de rayon nul), et S est confondu avec F; ensuite, la tangente à l'ovale en C est aussi la tangente à la conique et l'on sait que cette dernière droite passe par le point de rencontre de la directrice et de la perpendiculaire à FC en F; or, ce sont là les tangentes aux deux cercles fixes.

Solution analytique par M. E. N. Barisien. Soient F le foyer donné, e l'excentricité des coniques, O et R le centre et le rayon de la circonférence donnée. Prenons des axes rectangulaires en F, FO étant l'axe des x et la longueur $FO = a$.

L'équation d'une tangente à la circonférence étant

$$(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha - R = 0,$$

(*) G. de Longchamp, *Géom. Analyt.*, p. 32.

Digitized by Google

on peut écrire l'équation générale des coniques de l'énoncé sous la forme

$$x^2 + y^2 = e^2 [(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha - R]^2,$$

ou
$$(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{e} + R,$$

De sorte que l'enveloppe de ces coniques est la courbe

$$(x - a)^2 + y^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{e} + R\right)^2.$$

Pour un point M de cette courbe on a donc

$$\overline{MO}^2 = \left(\pm\frac{MF}{e} + R\right)^2;$$

le lieu se compose donc des deux ovales de Descartes ayant O et F pour foyers et pour chacun desquels on a

$$MO - \frac{MF}{e} = \pm R, \quad MO + \frac{MF}{e} = R.$$

Si $e = 1$, toutes les coniques sont des paraboles, et l'enveloppe de de ces paraboles est une ellipse ou une hyperbole, suivant que $OF < R$ ou $> R$.

Autres solutions analytiques par MM. Retali et Cardoso-Laynes.

M. Déprez, qui a résolu cette question en se servant des coordonnées polaires, accompagne sa solution des remarques suivantes :

I. Le second foyer, le centre, les sommets et les pieds des directrices décrivent des limaçons de Pascal.

II. Le second axe, les tangentes aux sommets, la seconde directrice de la conique enveloppent des circonférences.

Question 1251.

(*Mathesis*, (2), t. X, p. 32).

Une conique variable touche les côtés du triangle ABC *aux points* A', B', C'. *Si les droites* AA', BB', CC', *se coupent sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *la conique touche constamment la droite de Lemoine de* ABC. (E. Lemoine).

Solution par MM. C. Couturier et Retali. Prenons le triangle ABC

Digitized by Google

pour triangle de référence; l'équation d'une conique inscrite à ce triangle sera

$$\sqrt{f\mathrm{X}} + \sqrt{g\mathrm{Y}} + \sqrt{h\mathrm{Z}} = 0. \qquad (1)$$

Les droites unissant les sommets aux points de contact des côtés opposés auront pour équations

$$f\mathrm{X} - g\mathrm{Y} = 0, \quad g\mathrm{Y} - h\mathrm{Z} = 0, \quad h\mathrm{Z} - f\mathrm{X} = 0.$$

Ces droites se coupent en un même point dont les coordonnées sont $\frac{1}{f}, \frac{1}{g}, \frac{1}{h}$.

Or l'équation du cercle circonscrit étant

$$\mathrm{YZ}\sin\mathrm{A} + \mathrm{ZX}\sin\mathrm{B} + \mathrm{XY}\sin\mathrm{C} = 0,$$

la condition pour que le point de concours soit sur cette circonférence est

$$f\sin\mathrm{A} + g\sin\mathrm{B} + h\sin\mathrm{C} = 0. \qquad (2)$$

Mais la droite de Lemoine ayant pour équation

$$\frac{\mathrm{X}}{\sin\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{Y}}{\sin\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{Z}}{\sin\mathrm{C}} = 0,$$

la condition (2) exprime précisément la relation qui doit exister entre f, g, h pour que la droite de Lemoine soit tangente à la conique (1).

Solution par MM. Déprez, Krahé (Madrid). Plus généralement, si les droites AA′, BB′, CC′ se coupent sur une conique Δ circonscrite au triangle ABC, la première conique touche une droite fixe.

En effet, soit $\sqrt{fx} + \sqrt{gy} + \sqrt{hz} = 0$ l'équation de la conique inscrite; pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ soit une tangente, on doit avoir

$$\frac{f}{\lambda} + \frac{g}{\mu} + \frac{h}{\nu} = 0. \qquad (1)$$

D'autre part, le point de concours des droites AA′, BB′, CC′ a pour coordonnées $\frac{1}{f}, \frac{1}{g}, \frac{1}{h}$; s'il décrit la conique $\frac{\mathrm{L}}{x} + \frac{\mathrm{M}}{y} + \frac{\mathrm{N}}{z} = 0$, on a constamment

$$\mathrm{L}f + \mathrm{M}g + \mathrm{N}h = 0. \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) se confondent si l'on suppose L, M, N

Digitized by Google

proportionnels à $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$; autrement dit, la conique variable inscrite touche constamment la droite

$$\frac{x}{L}+\frac{y}{M}+\frac{z}{N}=0.$$

Cette droite est la polaire trilinéaire du point (L, M, N), qui lui-même est le point de concours des droites joignant A, B, C aux sommets correspondants du triangle formé par les tangentes aux points A, B, C de la conique Δ.

Solution par M. Boutin. Si (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées du point de concours des droites AA′, BB′, CC′, et si ce point se meut sur une conique circonscrite au triangle ABC, la conique variable a pour équation

$$\sqrt{\frac{x}{x_1}}+\sqrt{\frac{y}{y_1}}+\sqrt{\frac{z}{z_1}}=0, \qquad (1)$$

moyennant une condition de la forme

$$\frac{L}{x_1}+\frac{M}{y_1}+\frac{N}{z_1}=0. \qquad (2)$$

Pour trouver *l'enveloppe* de la conique (1), nous différentions les équations (1) et (2) par rapport aux paramètres variables x_1, y_1, z_1; il vient

$$\sqrt{\frac{x}{x_1^3}}\,dx_1+\sqrt{\frac{y}{y_1^3}}\,dy_1+\sqrt{\frac{z}{z_1^3}}\,dz_1=0, \qquad (3)$$

$$\frac{L}{x_1^2}\,dx_1+\frac{M}{y_1^2}\,dy_1+\frac{N}{z_1^2}\,dz_1=0. \qquad (4)$$

Les coefficients de dx_1, dy_1, dz_1 doivent être proportionnels; on en conclut

$$\sqrt{\frac{xx_1}{L}}=\sqrt{\frac{yy_1}{M}}=\sqrt{\frac{zz_1}{N}},$$

ou

$$\sqrt{x_1}:\sqrt{y_1}:\sqrt{z_1}=\frac{L}{\sqrt{x}}:\frac{M}{\sqrt{y}}:\frac{N}{\sqrt{z}}.$$

Digitized by Google

Introduisant dans l'équation (1) pour $\sqrt{x_1}, \sqrt{y_1}, \sqrt{z_1}$, les quantités proportionnelles, on obtient pour l'enveloppe

$$\frac{x}{L}+\frac{y}{M}+\frac{z}{N}=0.$$

Solution par M. Soons. Les tangentes menées en A, B, C au cercle ABC forment un triangle $A_1B_1C_1$, et rencontrent les côtés opposés du triangle ABC en trois points A_2, B_2, C_2 de la droite de Lemoine. Appelons N le point de concours des droites AA', BB', CC'. Les points A', B', C' sont les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère ABCN inscrit au cercle; donc la droite A'C' est la polaire de B'. Mais B_1 est le pôle de la droite AC; donc A'C' passe par B_1. De plus les droites B_1B' et A'C' forment un faisceau harmonique avec les tangentes BA, BC. On en conclut qu'il existe une conique touchant les côtés du quadrilatère ACA_2C_2 aux points B', A', E, C', E étant le point de rencontre des droites A_2C_2, $B'B_2$. Le théorème est donc démontré.

Cette démontration peut être étendue au cas où le cercle est remplacé par une conique quelconque circonscrite au triangle ABC.

Autres solutions par MM. Ripert et Emmerich.

La question 1251 se rattache à la question 1426 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. La réponse de M. *Duporcq* à cette dernière question (I. M, 1899, p. 280) contient la solution généralisée de la question 1251 (Note de M. Ripert.)

×Question 1253.

Voir *Mathesis* (2, X p. 32.)

Par deux points donnés A, B *faire passer une circonférence qui coupe une droite donnée m ou une circonférence donnée* O *sous un angle donné* α.

(Orlando.)

Premier problème. 1° La perpendiculaire élevée au milieu C de la distance AB rencontre m en un point D. En un point quelconque E de m, menons une droite qui fasse avec m l'angle $\frac{\pi}{2}-\alpha$, et soit ω' le point où elle rencontre CD. La circonférence décrite du centre ω' avec le rayon $\omega'E$ coupera m sous l'angle α; elle sera homothétique à la circonférence cherchée ω, le centre de similitude est D. Par conséquent, si la droite

Digitized by Google

DA rencontre la circonférence ω' en A', une parallèle à la droite $A'\omega'$ par A détermine sur CD le centre ω. (Soons.)

2° Décrivons une circonférence X qui coupe m sous l'angle α, et considérons-la comme une figure homothétique à la circonférence cherchée ω. Deux lignes homologues sont les perpendiculaires abaissées des centres X et ω sur AB; les points D', D où ces droites rencontrent m sont des points homologues connus. Par suite, la parallèle menée par D' à la droite DA rencontre la circonférence X en un point A' qui est l'homologue de A, et les rayons $A\omega$, $A'X$ sont parallèles; ce qui sert à déterminer le point ω. (Emmerich.)

3° Transformons pas inversion le cercle inconnu ω et la droite m en prenant pour pôle le point A, pour puissance $\overline{AB}^2$. La droite m se transforme en un cercle μ que l'on sait tracer. Le cercle ω se transforme en une droite ω_1 qui passe par B et coupe le cercle μ sous l'angle α. Or, toutes les droites qui coupent μ sous l'angle α enveloppent un cercle facile à construire. Il reste à mener par B les deux tangentes à ce dernier cercle, etc. (Soons et Emmerich.)

Second problème. 1° Soumettons encore la figure à une inversion en prenant pour pôle le point A et pour puissance $\overline{AB}^2$. Le cercle donné O se transforme en un cercle O', et le cercle cherché ω en une droite ω_1 qui passe par B et rencontre le cercle A' sous l'angle α. La solution s'achève comme précédemment. (Soons et Emmerich.)

2° Prenons pour centre d'inversion un point quelconque F de la circonférence O; celle-ci se transforme en une droite p. On trouve facilement les points A_1 et B_1 qui sont les transformés des points A et B. La question est ramenée à faire passer par A_1 et B_1 une circonférence qui rencontre la droite p sous l'angle α; ce qui est le premier problème.

Pour simplifier, prenons pour F une extrémité du diamètre du cercle O perpendiculaire à AB; en choisissant convenablement la puissance, on peut regarder la droite AB comme l'inverse du cercle O, et prendre pour A_1 et B_1 les points de rencontre de ce cercle avec les droites FA et FB. (Soons.)

M. Emmerich donne également une solution algébrique du second problème; M. Barisien résout les deux cas par le calcul.

Digitized by Google

Question 1256.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 32).

Soient B, C *deux points fixes d'une circonférence* O, A *un point variable de cette courbe. Etudier la variation de l'aire du triangle compris entre la médiane et la hauteur issues de* A *dans le triangle* ABC.

Même question pour le triangle ayant pour sommets le point A, *le centre de gravité* G *et l'orthocentre* H *du triangle* ABC.

Solution par MM. Emmerich, Barisien et Soons(*) : 1° Soient D le milieu de la corde BC, E et F les extrémités du diamètre OD, A′ la projection de A sur EF; nous supposons ED > DF. Prenons pour variable l'angle EOA = φ; à cause de la symétrie de la figure par rapport à EF, nous le supposons compris entre 0 et π; nous aurons alors

$$OA' = R\cos\varphi, \quad A'A = R\sin\varphi, \quad DA' = d + R\cos\varphi,$$

d désignant la distance DO. Par conséquent

$$S = \tfrac{1}{2}(d + R\cos\varphi).\, R\sin\varphi. \qquad (1)$$

Cette formule convient à toutes les positions de A pourvu que l'on considère S comme positif ou comme négatif suivant que A appartient à l'arc EB ou à l'arc BF. En E et en B, on a S = 0; donc S a un maximum S_1 en un certain point A_1 de l'arc AB. De même S passe par un minimum négatif S_2 en un certain point A_2 de l'arc AB.

Pour trouver S_1 et S_2 par un procédé élémentaire, écrivons

$$\frac{4S^2}{R^2\alpha^2\beta\gamma} = \left(\frac{d + R\cos\varphi}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{1 - \cos\varphi}{\beta}\right)\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\gamma}\right)$$

et exprimons que les facteurs du second membre sont égaux entre eux et ont une somme indépendante de $\cos\varphi$; ce qui donne

$$\frac{d + R\cos\varphi}{\alpha} = \frac{1 - \cos\varphi}{\beta} = \frac{1 + \cos\varphi}{\gamma}, \quad \frac{2R}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

L'élimination des inconnues auxilaires α, β, γ conduit à l'équation

$$\frac{2R}{d + R\cos\varphi} - \frac{1}{1 - \cos\varphi} + \frac{1}{1 + \cos\varphi} = 0,$$

ou

$$R\cos 2\varphi + d\cos\varphi = 0.$$

(*) Nous avons modifié ces solutions de manière à éviter l'emploi des coordonnées et du calcul différentiel, tout en complétant la discussion. (J. N.)

Digitized by Google

Si l'on appelle A l'angle BOD = BEC, on a $d = R \cos A$, et l'équation précédente se ramène à

$$\cos A \cos \varphi + \cos 2\varphi = 0.$$

On en tire

$$\cos \varphi = \frac{1}{4}(-\cos A \pm \sqrt{\cos^2 A + 8}).$$

Les deux racines sont admissibles; la première définit un angle $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, la seconde un angle $\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$.

Si l'on prend l'équation sous la forme

$$\frac{R}{d + R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad \text{ou} \quad d + R \cos \varphi = R \sin \varphi . \operatorname{tg} \varphi,$$

elle exprime que la médiane AD et le rayon AO font des angles égaux respectivement avec BC et FE ou encore que l'angle ADB = B — C.

La solution φ_2 exige un complément d'explication; car le principe sur lequel on s'est appuyé, suppose que les facteurs du produit à rendre maximum soient positifs. Or, si $d + R \cos \varphi$ est négatif, admettons que α représente un nombre négatif, et les égalités de condition seront les mêmes que tantôt.

2° Soit K la projection de A sur BC. Le triangle AHG vaut les $\frac{2}{3}$ du triangle AHD ou les $\frac{1}{3}$ du triangle OKD, car AG = $\frac{1}{3}$ AD et AH = 2OD. Le maximum de l'aire AHG a donc lieu lorsque le rayon OA est parallèle à BC.

Remarque. Bien que le triangle ABC tende vers zéro, lorsque A tend vers B, il n'en est pas de même du triangle AHG, car le côté AB ayant pour limite la tangente en B, la hauteur CH a pour limite une parallèle à OB; AH tend vers la perpendiculaire élevée en B sur BC. En prenant sur cette perpendiculaire (dans le sens OD) une longueur AH′ = 2OD, on aura l'orthocentre H′ du triangle aplati BBC. (J. N.)

Digitized by Google

*QUESTIONS D'EXAMEN.

952. On coupe un tétraèdre ABCD par un plan quelconque parallèle à la face BCD; soient B'C'D' la section, B''C''D'' la projection de B'C'D' sur le plan BCD parallèlement à une direction donnée u. Trouver le lieu géométrique du centre de gravité du prisme B'C'D' B''C''D'' (milieu de la droite joignant les centres de gravité des bases).

Ce lieu est la droite joignant le centre de gravité de BCD au milieu de la parallèle à u menée par A et terminée au plan BCD.

953. Un cercle variable touche une parabole donnée en un point donné M et la rencontre en deux autres points P, Q; démontrer que le milieu de la corde PQ est à une distance constante de l'axe de la parabole.

Plus généralement, un cercle variable coupe une conique en quatre points A, B, C, D; si la corde AB a une direction constante, il en est de même de la corde CD.

954. On donne deux droites parallèles AP, BQ et un cercle O tangent à ces droites aux points A et B. Soit M un point quelconque du cercle O; on mène les droites MA, MB qui coupent BQ, AP en B', A'.

On trace la droite A'B', et on mène sur AB la perpendiculaire MD qui coupe A'B' en M'. 1° On a MD = M'M; 2° le point M' décrit une ellipse E; 3° trouver l'angle dont il faut faire tourner l'ellipse E autour de AB pour qu'elle se projette suivant le cercle O; 4° A'B' est la tangente en M' à l'ellipse E; 5° calculer la longueur MD, de manière que la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze ABB'A' tournant autour de BA soit égale à m fois la surface du cercle Q.

(*Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles*).

955. Trouver le plus petit parallélogramme circonscrit à une ellipse donnée.

Cette question, proposée dans plusieurs manuels, peut être résolue analytiquement et géométriquement. Nous résumons ici une solution analytique qui nous a été communiquée par M. Tonneau (Liége), mais qui a déjà été publiée. Soient

$$y = mx + \mu, \quad y = mx - \mu, \quad y = m'x + \mu', \quad y = m'x - \mu'$$

les équations de deux couples de tangentes parallèles MN et QP, MQ et NP; μ et μ' désignent $\sqrt{a^2m^2+b^2}$, $\sqrt{a^2m'^2+b'^2}$. On calcule facilement les coordonnées

$$x_M = \frac{\mu'-\mu}{m-m'}, \quad y_M = \frac{m\mu'-\mu m'}{m-m'}, \quad x_N = -\frac{\mu'+\mu}{m-m'}, \quad y_N = -\frac{m\mu'+\mu m'}{m-m'};$$

d'où

$$\overline{MN}^2 = 4\mu'^2(1+m^2) : (m-m')^2.$$

Digitized by Google

La hauteur du parallélogramme est le double de la distance du centre de l'ellipse à MN, ou $2\mu : \sqrt{1+m^2}$. La quantité à rendre minimum est donc

$$\frac{\mu'^2\mu^2}{(m-m')^2} = \frac{(a^2m^2+b^2)(a^2m'^2+b'^2)}{(m-m'^2)} - a^2b^2 + a^2b^2 = \frac{(a^2mm'+b^2)^2}{(m-m')^2} + a^2b^2;$$

le minimum correspond donc à $a^2mm' + b^2 = 0$, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1277**. On donne les angles d'un triangle ABC, et le rayon r du cercle inscrit, qui touche BC, CA, AB aux points D, E, F. Lorsque la figure tourne autour de la bissectrice de l'angle BAC, calculer les surfaces engendrées par les droites AF, FB, EC et par les deux arcs que sous-tend la corde FE. Trouver également les volumes engendrés par les triangles curvilignes ayant pour côtés les droites AF, AE et l'un des arcs de cercle FE.

1278. Par un point fixe A on mène une sécante quelconque qui rencontre une circonférence donnée O aux points B et C, et on construit le carré BCDE. Trouver les lieux des sommets D, E et du centre du carré. (G. DE ROCQUIGNY).

1279. Sur les côtés du triangle ABC comme bases on construit trois triangles isoscèles semblables A_1BC, B_1CA, C_1AB. Lorsque l'angle A_1BC varie, les points de concours A_2, B_2, C_2 des couples de droites (BC_1, CB_1), (AB_1, A_1B), (CA_1, C_1A) décrivent trois hyperboles. Les droites AA_2, BB_2, CC_2 concourent en un même point P, qui décrit une droite. Si A'_1BC, B'_1CA, C'_1AB sont trois triangles isoscèles dont l'angle à la base est complémentaire de l'angle A_1BC, et que A'_2, B'_2, C'_2 désignent les points de concours de couples (BC'_1, CB'_1), (AB'_1, A'_1B), (CA'_1, C'_1A), les droites $A_2A'_2$, BB'_2, CC'_2 concourent au centre du cercle circonscrit au triangle ABC. (J. NEUBERG.)

1280. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^2+a & x_1x_2 & \dots & x_1x_{p-1} & x_1x_p & y_1 \\ x_1x_2 & x_2^2+a & \dots & x_2x_{p-1} & x_2x_p & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1x_{p-1} & x_2x_{p-1} & \dots & x_{p-1}^2+a & x_{p-1}x_p & y_{p-1} \\ x_1x_p & x_2x_p & \dots & x_{p-1}x_p & x_p^2+a & y_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{p-1} & y_p & -1 \end{vmatrix}$$

(A. DEMOULIN.)

Rectification. Page 152, l. 7, lire *somme* au lieu de *limite*.

Digitized by Google

QUESTIONS DE THÉORIE DES NOMBRES;

par S. Realis.

1. ***Assigner, par formules directes, toutes les solutions entières de l'équation indéterminée***

$$mx^2 - 3mxy + (2m+1)y^2 = 1,$$

m étant un entier donné.

Solution. On tire, de l'équation proposée,

$$x = \frac{3y}{2} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{(m^2-4m)y^2 + 4m}.$$

Les deux valeurs de x seront rationnelles, si la quantité sous le radical se réduit à un carré. Posant (puisque le carré doit être divisible par m)

$$(m^2 - 4m)y^2 + 4m = m^2z^2,$$

on tombe sur l'équation

$$mz^2 - (m-4)y^2 = 4,$$

dont les solutions entières amènent, pour la proposée, des valeurs de x et y *entières.*

L'équation en y, z est résolue complètement au t. II, p. 535, des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série), 1883. Il en résulte, pour x et y, les valeurs successives

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = m, \\ y = m-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2m-3, \\ y = m-1, \end{cases} \text{ etc.}$$

2. ***α étant un entier quelconque, et β un entier différent de*** ± 1, ***de*** $1 \pm 2\alpha$, ***et de*** $7 \pm 2\alpha$, ***l'équation***

$$x^4 - 4(\alpha^2+\beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2+\beta)x - (\alpha^4 - 2\beta^2 + 2) = 0$$

n'a pas de racine entière.

Démonstration. D'après un théorème d'Euler, l'équation $2u^2 - 2 = v$, est impossible en entiers u, v, excepté pour les deux systèmes

$$\begin{cases} u = \pm 1, \\ v = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \pm 3, \\ v = \pm 2. \end{cases}$$

Digitized by Google

Cela étant, l'équation

$$2(x^2 - \alpha x - \beta)^2 - 2 = (x - \alpha)^4,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 4(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - 2\beta^2 + 2) = 0,$$

est impossible en entiers α, β, x, excepté dans les cas suivants :

$$1^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = 1, \\ x = \alpha, \end{cases} \qquad \beta = -1;$$

$$2^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = -1, \\ x = \alpha, \end{cases} \qquad \beta = 1;$$

$$3^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = 3, \\ x = \alpha + 2, \end{cases} \qquad \beta = 2\alpha + 1;$$

$$4^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = 3, \\ x = \alpha - 2, \end{cases} \qquad \beta = -(2\alpha - 1);$$

$$5^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = -3, \\ x = \alpha + 2, \end{cases} \qquad \beta = 2\alpha + 7;$$

$$6^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = -3, \\ x = \alpha - 2; \end{cases} \qquad \beta = -(2\alpha - 7).$$

De là l'énoncé **3**.

3. *α étant un entier quelconque, et β un entier différent de zéro, et différent de $\pm\alpha^2$, et de $-2\alpha^2$, l'équation*

$$x^4 + 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0$$

n'a pas de racine entière.

Démonstration. D'après un théorème d'Euler, l'équation $x^4 + y^4 = r^2$ est impossible en entiers, excepté pour $x = 0$, ou $y = 0$.

L'équation

$$x^4 + (x + \alpha)^4 = (x^2 + 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 + 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0,$$

est donc impossible, excepté :

1° pour $x = 0$, auquel cas $\beta = \pm\alpha^2$;

2° pour $x = -\alpha$, auquel cas on a $\beta = 0$, ou $\beta = -2\alpha^2$.

De là l'énoncé **3**.

4. *α étant un entier quelconque, et β un entier positif, non carré. l'équation*

$$x^4 - 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

n'a pas de racine entière.

Digitized by Google

Démonstration. D'après un théorème d'Euler, l'équation $y^4 - x^4 = r^2$ est impossible en entiers, excepté pour :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ r = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ r = \pm y^2, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \pm y, \\ r = 0. \end{array}\right.$$

L'équation

$$(\alpha - x)^4 - x^4 = (x^2 - 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

est donc impossible, excepté :

1° pour $\alpha = 0$, auquel cas on a $x^2 - \beta = 0$, et β doit être un carré;

2° pour $x = \frac{\alpha}{2}$, auquel cas, α étant pair, on doit avoir $\beta = -\frac{3\alpha^2}{4}$, valeur négative.

3° Pour $x = 0$, auquel cas on doit avoir $\beta = \pm \alpha^2$, et la valeur positive de β est un carré.

5. *α étant un entier quelconque, et β un entier différent de zéro, de -1 et de $\pm\alpha$, l'équation*

$$x^4 + 2\alpha x^3 - (\alpha^2 + 2\beta + 1)x^2 + \alpha(2\beta + 1)x - (\beta^2 + \beta) = 0$$

n'a pas de racine entière.

Démonstration. D'après un théorème de Fermat, l'équation

$$y^2 + y = 2x^4$$

est impossible en nombres entiers, excepté pour

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y = -1, \\ x = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y = 1, \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

L'équation

$$(x^2 - \alpha x + \beta)^2 + x^2 - \alpha x + \beta = 2x^4,$$

c'est-à-dire

$$x^4 + 2\alpha x^3 - (\alpha^2 + 2\beta + 1)x^2 + \alpha(2\beta + 1)x - (\beta^2 + \beta) = 0,$$

est donc impossible, excepté :

1° pour $x = 0$; alors $\beta = 0$, ou $\beta = -1$;
2° pour $x = 1$; alors $\beta = \alpha$;
3° pour $x = -1$; alors $\beta = -\alpha$.

6. *α et β étant entiers, et aucune des expressions*

$$\alpha^2 - 2\alpha - 19, \quad \alpha^2 - 2\alpha - 3, \quad \alpha^2 - 2\alpha + 5$$

Digitized by Google

ne se réduisant à un carré, l'équation

$$x^4 + (2\alpha - 1)x^3 + (\alpha^2 + \beta)x^2 - \beta(2\alpha + 3\beta)x + \beta^3 + \beta^2 - 1 = 0$$

n'a pas de racine entière.

Démonstration. D'après un théorème d'Euler, l'équation $u^3 + 1 = v^2$ est impossible en nombres entiers excepté pour

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = \pm 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = -1, \\ v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 2 \\ v = \pm 3. \end{cases}$$

L'équation

$$(x - \beta)^3 + 1 = (x^2 + \alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 + (2\alpha - 1)x^3 + (\alpha^2 + \beta)x^2 - \beta(2\alpha + 3\beta)x + \beta^3 + \beta^2 - 1 = 0,$$

est donc impossible, excepté pour

$$\begin{cases} x = \beta, \\ \beta^2 + (\alpha - 1)\beta = 1; \end{cases} \quad \alpha^2 - 2\alpha + 5 = \text{carré},$$

$$\begin{cases} x = \beta, \\ \beta^2 + (\alpha - 1)\beta = -1; \end{cases} \quad \alpha^2 - 2\alpha - 3 = \text{carré}.$$

$$\begin{cases} x = \beta - 1, \\ (\beta - 1)^2 + \alpha(\beta - 1) - \beta = 0; \end{cases} \quad \alpha^2 - 2\alpha + 5 = \text{carré}.$$

$$\begin{cases} x = \beta + 2, \\ (\beta + 2)^2 + \alpha(\beta + 2) - \beta = 3; \end{cases} \quad \alpha^2 - 2\alpha + 5 = \text{carré}.$$

$$\begin{cases} x = \beta + 2, \\ (\beta + 2)^2 + \alpha(\beta + 2) - \beta = -3; \end{cases} \quad \alpha^2 - 2\alpha - 19 = \text{carré}.$$

Il est facile, comme on le voit, d'établir une foule de propositions analogues à celles qui viennent d'être démontrées. Des exemples en ont déjà été donnés dans la *Mathesis*.

Turin, 24 mai 1883.

Note. A propos de la dernière question de Realis, rappelons à nos lecteurs, le curieux *théorème empirique* de Catalan, dont personne n'a pu donner la démonstration, ni prouver la fausseté :

8 et 9 sont les seuls nombres entiers consécutifs qui soient des puissances exactes. (P. M.)

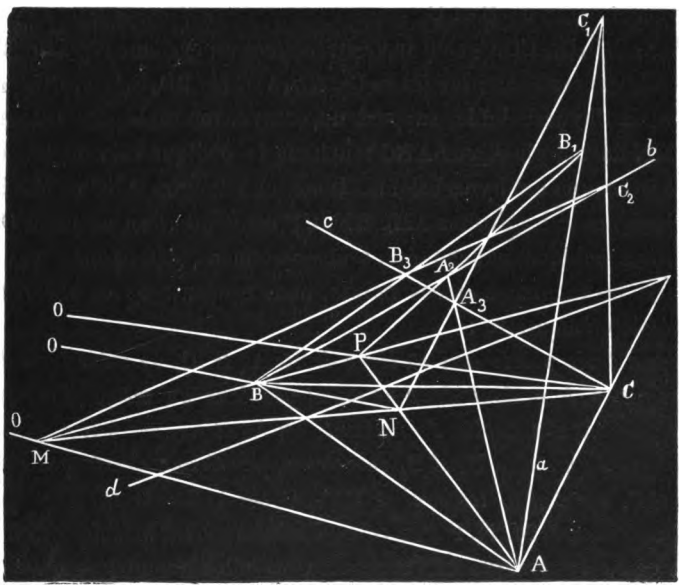
Digitized by Google

LE THÉORÈME DE CHASLES RELATIF AUX CUBIQUES GAUCHES;

par M. STUYVAERT, professeur à l'Athénée de Gand.

Le point de rencontre de trois plans osculateurs à une cubique gauche est situé dans le plan des trois points d'osculation (*).

Il existe, à notre connaissance, une dizaine de démonstrations de ce théorème; les plus élégantes, comme il arrive souvent, sont celles qui supposent le plus de connaissances antérieures. La méthode que nous allons employer est au fond une variante de celles de VON STAUDT (**)



et de SCHRÖTER(***); elle a l'avantage de pouvoir se placer tout au début de la théorie et de conduire à quelques conséquences curieuses.

1. Soient A, B, C trois points de la cubique, et a, b, c les tangentes en

(*) CHASLES (*Liouville* (2) II, 1857, pp. 397-407). On peut définir une cubique gauche, l'intersection partielle de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune; la courbe est projetée de chacun de ses points suivant un cône du second ordre, la tangente à la courbe au sommet de ce cône est une génératrice de celui-ci, et le plan osculateur est tangent au cône.

(**) *Geometrie der Lage.*

(***) *Crelle*, (1859), t. 56, p. 27.

Digitized by Google

ces points. Les plans ABb, ACc et le plan osculateur α en A touchent respectivement le cône de sommet A perspectif à la courbe, le long des génératrices AB, AC, a. D'après une propriété connue des cônes du second ordre, les plans ABC, ACa, ABa coupent respectivement les plans α, ABb, ACc suivant trois droites d'un même plan.

Donc, si B_1, C_1 ; C_2, A_2 ; A_3, B_3 sont les points de rencontre respectifs de a avec les plans (B, c) et (C, b), de b avec (C, a) et (A, c), de c avec (A, b) et (B, a) ; si M, N, P sont les traces de B_3C_2, C_1A_3 et B_1A_2 sur le plan ABC, il résulte de ce qu'on vient de voir que AM appartient au plan α ; pareillement BN et CP sont respectivement des droites des plans osculateurs en B et C.

AA_2A_3, BB_3B_1, CC_1C_2 sont trois directrices du système réglé dont a, b, c sont trois génératrices ; les plans (a, AA_2A_3), (b, BB_3B_1), (c, CC_1C_2) sont tangents à l'hyperboloïde, support de ce système réglé ; les traces NP, PM, MN de ces plans sur ABC touchent la conique suivant laquelle le plan ABC coupe cet hyperboloïde. Donc les triangles ABC et MNP sont homologiques et les droites AM, BN, CP concourent en un point O.

2. Une cubique gauche étant complètement déterminée par trois points et les tangentes en ces points, nous rencontrons ce théorème de Géométrie élémentaire :

Si par trois points non en ligne droite A, B, C, *on mène trois droites quelconques a, b, c, dont deux ne soient pas dans un même plan, si l'on mène, par* A, *une droite s'appuyant, en* A_2 *et* A_3, *sur b et c, par* B *une droite qui s'appuie en* B_3 *et* B_1 *sur c et a, par* C *une droite qui s'appuie en* C_1 *et* C_2 *sur a et b, les droites* B_3C_2, C_1A_3, A_2B_1 *percent le plan* ABC *aux trois sommets* M, N, P *d'un triangle circonscrit et homologique à* ABC.

Les côtés du triangle MNP coupent les côtés homologues de ABC en trois points d'une droite d qui est visiblement la polaire de O, à la fois par rapport au triangle ABC et à la conique Σ, intersection du plan ABC avec l'hyperboloïde déterminé par a, b, c. Donc, *la conique* Σ *est la conique polaire de* O *par rapport au triangle* ABC (*).

A cause d'une propriété connue, la droite polaire de O par rapport à ABC est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique (plans imaginaires conjugués si A, B, C sont réels).

(*) Voir Dixon, *On twisted cubics* (*Quarterly Journal*, t. 24).

Digitized by Google

Donc *l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* MNP *est l'intersection de deux plans osculateurs.*

En faisant la figure polaire réciproque de celle qui se trouve dans le plan ABC et en choisissant Σ comme conique directrice, on voit que *la conique* Σ *est la conique polaire de la droite d par rapport à la courbe de troisième classe représentée par les trois points* M, N, P. (*).

AIRE DES SINUSOÏDES ET FORMULE DE WALLIS (**).

1. *Aire d'une courbe.* Soient

$$x_0,\ x_1 = x_0 + \delta_1,\ x_2 = x_0 + \delta_2,\ \ldots,\ X = x_{n-1} + \delta_n,$$

les abscisses d'une courbe continue, les intervalles positifs δ étant égaux ou inégaux;

$$y_{01},\ y_{12},\ y_{23},\ \ldots,\ y_{n-1,n},$$

les ordonnées correspondant respectivement à un point quelconque des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$.

On sait que la somme

$$y_{01}\delta_1 + y_{12}\delta_2 + \ldots + y_{n-1,n}\delta_n \quad \text{ou} \quad \sum_{x_0}^{X} y\delta$$

tend vers une limite bien déterminée S, quand tous les δ tendent simultanément vers zéro. Quand les ordonnées y sont toutes positives, S est l'aire de la courbe considérée depuis y_0 jusque Y. Quand elles sont tantôt positives, tantôt négatives, S est l'aire de la partie de la courbe située au dessus de l'axe des x, moins l'aire de la partie située en dessous. Dans ce qui suit, nous appellerons S, dans les deux cas, *l'aire* (*algébrique*) de la courbe.

2. *Aire de la sinusoïde fondamentale.* Considérons la courbe $y = \sin mx$ et choisissons pour $y_{01}, y_{12}, \ldots, y_{n-1,n}$ les ordonnées correspon-

---

(*) La figure possède encore des propriétés descriptives que l'on aperçoit aisément.

(**) Dans cet article, nous évitons l'emploi du calcul intégral, dans le sens propre du mot (calcul inverse du calcul différentiel), parce qu'il implique la connaissance du calcul différentiel et, en particulier, celle de ce théorème difficile à établir : *Deux fonctions qui ont une même dérivée ne diffèrent que par une constante.*

Digitized by Google

dant au milieu de chacun des intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ supposés tous égaux. On aura

$$\sum_{x_0}^{X} y\delta = \delta\left[\sin m\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) + \sin m\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right) + \ldots + \sin m\left(x_{n-1} + \frac{\delta}{2}\right)\right].$$

Mais

$$2\sin m\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{m\delta}{2} = \cos mx_0 - \cos mx_1,$$

$$2\sin m\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{m\delta}{2} = \cos mx_1 - \cos mx_2,$$

. . . . . .

$$2\sin m\left(x_{n-1} + \frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{m\delta}{2} = \cos mx_{n-1} - \cos mX.$$

Par suite, dans le cas actuel,

$$\sum_{x_0}^{X} y\delta = \frac{\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{m\delta}{2}}(\cos mx_0 - \cos mX),$$

et, à la limite, pour $\delta = 0$,

$$S = \lim \sum_{x_0}^{X} y\delta = \frac{\cos mx_0 - \cos mX}{m}$$

puisque, pour $\delta = 0$,

$$\lim \frac{\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{m\delta}{2}} = \frac{1}{m}\lim \frac{\frac{m\delta}{2}}{\sin\frac{m\delta}{2}} = \frac{1}{m} \times 1.$$

Remarque. On trouve de même, pour l'aire (algébrique) S′ de la *cosinusoïde* $y = \cos mx$, de x_0 à X,

$$S' = \frac{\sin mX - \sin mx_0}{m}.$$

Si $x_0 = 0$, $X = \frac{1}{2}\pi$, on a, en particulier,

$$S' = \frac{\sin\frac{1}{2}m\pi}{m}.$$

Par suite, dans le cas où $m = 2n$, n étant entier,

$$S' = 0,$$

et, si $m = 2n + 1$,

$$S' = (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Digitized by Google

Si de plus $n = 0$, ou $m = 1$, on trouve que l'aire de $y = \cos x$ (et aussi celle de $y = \sin x$), de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$, est égale à 1.

3. *Aire des sinusoïdes paires.* Nous appelons *sinusoïde paire* la courbe ayant pour équation $y = \sin^{2n} x$, n étant entier positif. La *cosinusoïde* $y = \cos^{2n} x$ est au fond identique à cette sinusoïde, comme on le voit en remplaçant x par $\frac{1}{2}\pi - x$, c'est-à-dire, par un simple changement d'axes de coordonnées.

Nous allons chercher l'aire S_{2n} de la seconde de ces courbes, de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$. Elle est évidemment égale à l'aire de la première dans le même intervalle.

D'après une forme connue,

$$2^{2n-1}\cos^{2n} x = \cos 2nx + C^1_{2n}\cos(2n-2)x + \cdots + C^{n-1}_{2n}\cos 2x + \tfrac{1}{2}C^n_{2n},$$

si l'on représente par C^r_p les combinaisons de p lettres r à r. Il en résulte immmédiatement

$$2^{2n-1}\lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n} x \,.\, \delta = \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2nx \,.\, \delta + C^1_{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2n-2)\,x \,.\, \delta$$

$$+ \ldots + C^{n-1}_{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2x \,.\, \delta + \tfrac{1}{2} C^n_{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \delta .$$

D'après la remarque du n° 2, tous les termes du second membre à l'exception du dernier sont nuls; le dernier est évidemment égal à $\frac{1}{2} C^n_{2n} \,.\, \frac{1}{2}\pi$. Le premier membre est d'ailleurs $2^{2n-1} S_{2n}$.

On a donc

$$2^{2n-1} S_{2n} = \frac{1}{2} C^n_{2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C^n_{2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1.2.3 \ldots 2n}{1.2.3 \ldots n \,.\, 1.2.3 \ldots n} \frac{\pi}{2} = \frac{1.2.3 \ldots 2n}{2.4. \ldots 2n \,.\, 2.4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

ou enfin,

$$S_{2n} = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. On trouve de même, pour l'aire S_{2n+2} de $y = \cos^{2n+2} x$ ou $y = \sin^{2n+2} x$, de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$,

$$S_{2n+2} = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2.4.6 \ldots 2n(2n+2)} \frac{\pi}{2}.$$

Digitized by Google

Par conséquent,

$$S_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} S_{2n}.$$

4. ***Aire des sinusoïdes impaires.*** Les courbes identiques $y = \sin^{2n+1} x$, $y = \cos^{2n+1} x$, qui peuvent s'appeler ***sinusoïdes*** et ***cosinusoïdes impaires***, ont évidemment une même aire S_{2n+1} de $x = 0$ à $x = 1$.

On a, comme l'on sait,

$$2^{2n} \cos^{2n+1} x = \cos(2n+1)x + C^1_{2n+1} \cos(2n-1)x + \cdots$$
$$+ C^{n-1}_{2n+1} \cos 3x + C^n_{2n+1} \cos x,$$

et, par suite,

$$2^{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n+1} x \,.\, \delta = \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2n+1)x \,.\, \delta$$
$$+ C^1_{2n+1} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2n-1)x \,.\, \delta + \cdots$$
$$+ C^{n-1}_{2n+1} \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 3x \,.\, \delta + C^n_{2n+1} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \,.\, \delta,$$

ou d'après la dernière formule du n° 2, en renversant l'ordre des termes du second membre,

$$2^{2n} S_{2n+1} = C^n_{2n+1} - \frac{1}{3} C^{n-1}_{2n+1} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} C^1_{2n+1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

On trouve de même, pour l'aire S_{2n-1} de $y = \cos^{2n-1} x$ ou $y = \sin^{2n-1} x$,

$$2^{2n-2} S_{2n-1} = C^{n-1}_{2n-1} - \frac{1}{3} C^{n-2}_{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{1}{2n-1} C^1_{2n-1}$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

D'après *une formule combinatoire* démontrée antérieurement (***Mathesis***, p. 159) le rapport des seconds membres des relations précédentes est $[8n : (2n+1)]$. On trouve donc, en divisant ces deux relations l'une par l'autre,

$$2^2 \frac{S_{2n+1}}{S_{n-1}} = \frac{8n}{2n+1},$$

c'est-à-dire

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} S_{2n-1},$$

Digitized by Google

relation analogue à celle qui termine le n° 3. On a de même, successivement,

$$S_{2n-4} = \frac{2n-2}{2n-1} S_{2n-5}$$

$$S_{2n-5} = \frac{2n-4}{2n-3} S_{2n-5}$$

$$S_3 = \frac{2}{3} S_1.$$

On a d'ailleurs, pour n nul, d'après la remarque qui termine le n° 2, $S_1 = S' = 1$. Donc enfin

$$S_{2n+1} = \frac{2.4.6. \ldots 2n}{1.3.5.7. . (2n+1)}.$$

Remarque. Si p est entier, pair ou impair, on a

$$p S_p = (p-1) S_{p-2},$$

d'après la remarque du n° 3 et ce qui vient d'être prouvé.

5. *Formule de Wallis.* On a évidemment, de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$,

$$\cos^{2n}x \geqq \cos^{2n+1}x \geqq \cos^{2n+2}x,$$

et, par suite, la courbe $y = \cos^{2n+1}x$ est située entre les courbes $y = \cos^{2n}x$ et $y = \cos^{2n+2}x$, tout en ayant les mêmes extrémités. On a donc

$$S_{2n} > S_{2n+1} > S_{2n+2},$$

ou

$$\frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6 \ldots 2n}{3.5.7 \ldots (2n+1)} > \frac{1.3.5 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots (2n+2)} \frac{\pi}{2}.$$

On déduit de là

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots . 2n.2n}{1.3.3.5.5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots . 2n.2n}{1.3.3.5\ 5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)} \times \frac{2n+2}{2n+1},$$

ou, en abrégé,

$$\frac{\pi}{2} > P_{2n}, \quad \frac{\pi}{2} < P_{2n}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right),$$

en posant

$$P_{2n} = \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots . 2n.2n}{1.3.3.5.5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)}.$$

Digitized by Google

On peut donc écrire

$$\frac{\pi}{2} = P_{2n}\left(1 + \frac{\theta}{2n+1}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\theta}{2n+1}} = P_{2n},$$

en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1. Par suite, en faisant $n = \infty$, on a

$$\frac{\pi}{2} = \lim P_{2n} = \lim \frac{2.2\ 4.4.6.6 \ldots 2n.2n}{1.3.5.5.7.7 \ldots (2n-1)(2n+1)},$$

ce qui est la formule de Wallis.

Note. Le théorème du n° 1 sur l'existence de la limite S est dû à Cauchy; on l'attribue souvent à tort à Riemann (voir notre *Cours d'Analyse*, n°s 106-108, pp. 25-26). — Si nos souvenirs sont exacts, c'est Kepler qui a obtenu, le premier, l'aire de la sinusoïde fondamentale, par un procédé identique ou analogue à celui du n° 2. — Wallis a trouvé sa formule *par induction* et l'a publiée dans son *Arithmetica infinitorum* (1655). — Laplace, dans la première des *Additions* de sa *Théorie analytique des Probabilités* (pp. 462 464, de la 3e édition (1820), en donne une démonstration, qui traduite dans le langage précis de l'analyse moderne devient celle du n° 5; puis (pp. 465-468) il analyse avec soin la démonstration de Wallis en en signalant les postulats; enfin (pp. 469-470) il en déduit une formule de Stirling. — La formule de Wallis se déduit aisément de celle qui donne cos x, sous forme de produit infini, mais cette formule relative à cos x n'est pas aussi facile à établir qu'il paraît au premier abord (voir Serret, *Trigonométrie*, cinquième édition (1875), pp. 242-247, n°s 185-188). (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Précis d'Arithmétique élémentaire, à l'usage des écoles moyennes, des Cours professionnels, des Écoles normales et des classes d'humanités par l'abbé E. Gelin, Docteur en philosophie et en théologie, professeur de Mathématiques supérieures au collège Saint-Quirin à Huy. Quatrième édition, rédigée d'après un plan simplifié et contenant les solutions raisonnées de cent trente problèmes-types. Namur, Wesmael-Charlier; Huy, chez l'auteur (In-8° de 272 p.). Prix : 3 francs.

Nous avons maintes fois parlé dans *Mathesis* du *Traité*, du *Précis* et de *Recueil*

Digitized by Google

de problèmes d'Arithmétique de M. l'abbé Gelin et nous en avons fait ressortir les qualités, au point de vue scientifique, pédagogique et pratique.

Si nous ne nous contentons pas aujourd'hui de signaler simplement la quatrième édition du *Précis*, c'est que l'auteur a introduit de profondes modifications dans l'ordre des matières exposées dans les éditions antérieures.

L'ordre ancien était celui-ci : 1. Opérations sur les nombres entiers. 2. Caractères de divisibilité. 3. Théorie des nombres premiers. 4. Fractions ordinaires. 5. Fractions décimales. 6. Fractions décimales périodiques. 7. Les mesures. 8. La résolution des problèmes. 9. Puissances et racines. 10. Rapports et proportions. 11. Progressions et logarithmes.

L'ordre nouveau est 1, 2, 4, 5, 7, 8, 3, 6, 9, 10, 11; les difficultés sont beaucoup mieux graduées, la théorie des fractions étant rendue indépendante autant que possible de la théorie des nombres premiers. Il y a une foule de manuels d'arithmétique élémentaire, où l'on procède de cette manière, mais dans la plupart, on le fait aux dépens de la rigueur. Naturellement, M. Gelin n'a eu garde de tomber dans ce défaut. Dans la théorie des fractions ordinaires, il se borne aux notions indispensables sur la simplification des fractions et sur la réduction au même dénominateur, sauf à revenir plus tard sur ces deux questions, après la théorie des nombres premiers.

Nous croyons que l'ordre nouveau adopté dans le *Précis* de M. Gelin en rendra l'emploi beaucoup plus facile pour la moyenne des élèves, et nous sommes persuadé que son livre, sous sa nouvelle forme, rendra plus de services encore à l'enseignement que sous l'ancienne (*) (P. M.)

Cours de Géométrie élémentaire à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales, des candidats aux écoles du gouvernement et des candidats à l'agrégation, par MM. B. Niewenglowski, Inspecteur de l'Académie de Paris, et L. Gérard, Professeur au lycée Charlemagne. Paris, G. Carré et C. Naud. *Première partie*. Géométrie plane, 1898 (In-8° carré de XX-362 p. avec 289 figures. Prix cart., 5 fr.; broché, 4 fr.) *Deuxième partie*. Géométrie dans l'espace, 1899. (In-8° carré de 495 p. avec 363 figures. Prix : cart. 6 fr., broché 5 fr.).

Voici un excellent ouvrage que nous aurions voulu signaler à nos lecteurs plus tôt. Les auteurs se sont proposé de nous doter d'un Cours de géométrie qui soit rigoureux et complet sans être trop compliqué; ils ont voulu tenir compte dans

---

(*) Trois petites observations : 1° On peut supprimer sans inconvénient le n° 58, contenant une règle difficile à retenir et non démontrée. 2° Au n° 97, 4° on peut prouver que le produit est un dénominateur commun; il ne faut renvoyer au n° 372 que pour la démonstration de ce fait que ce dénominateur commun est le plus petit. 3° La règle relative aux annuités (n° 489) peut se déduire de la formule des intérêts composés sans recourir aux progressions. N'est-il pas utile de faire connaître cette seconde manière d'établir cette règle?

Digitized by Google

une certaine mesure des observations critiques adressées à l'enseignement de la géométrie de divers côtés, mettre à profit les perfectionnements signalés dans les recueils périodiques ou ayant cours dans certaines classes, enfin introduire les nouvelles théories utiles à connaître et en quelque sorte indispensables à ceux qui se préparent aux études supérieures. Bien que le manuel s'éloigne des programmes belges ou plutôt pour cette raison même les élèves de nos classes scientifiques et même les professeurs y trouveront une foule de choses intéressantes, instructives ou originales.

Sauf quelques changements qui ont leur valeur, l'ordre des matières est, en général celui qui est suivi dans les manuels français depuis un demi-siècle : Le troisième livre comprend les figures semblables, le quatrième la mesure des aires, le septième tout ce qui est relatif aux corps ronds, le huitième les courbes usuelles.

Les notions fondamentales ont été exposées avec clarté et rigueur : définitions de la droite et du plan, comparaison des segments rectilignes, mesure des grandeurs (avec une note à la fin du premier volume), etc. Ainsi que la logique l'exige, avant d'aborder la géométrie plane on démontre que par trois points non en ligne droite on peut faire passer un plan et un seul. Les premières notions sur la circonférence se placent au début de la géométrie plane, et l'idée d'angle reçoit tous ses développements en se liant à celle de l'arc de cercle décrit du sommet comme centre et intercepté entre les côtés. Les auteurs placent la théorie des parallèles avant celle des perpendiculaires; cet ordre leur permet de généraliser l'idée d'angle et de parler des plans orientés avant de passer aux propriétés des triangles et des polygones. A l'occasion de la symétrie par rapport à un centre ou une droite, ils insistent sur l'égalité directe ou l'égalité inverse de deux figures situées dans un même plan.

La mesure des angles au centre, dans le cas de l'incommensurable, est présentée aussi simplement que possible, sans le subterfuge de renvoyer aux traités d'Arithmétique qui, eux-mêmes, renvoyent souvent aux traités de Géométrie. Les problèmes du deuxième et du troisième livre sont accompagnés de l'appréciation de la simplicité et de l'exactitude des constructions, d'après les principes de M. Lemoine. A la fin du deuxième Livre sont exposées les premières notions sur le déplacement d'une figure plane (Translation, rotation, retournement).

Le Livre III débute par quelques connaissances sur les *vecteurs*, et par l'étude de la variation du rapport MA : MB quand le point M parcourt la droite indéfinie AB; cette étude conduit à introduire le point à l'infini de la droite. La théorie des lignes proportionnelles est accompagnée de la construction des expressions rationnelles. La théorie des figures homothétiques précède celle des figures semblables; cette marche, préconisée depuis longtemps, est plus rationnelle que l'ancienne. Le chapitre intitulé *Propriétés métriques du triangle, du quadrilatère, du cercle, etc.* est très complet; on y rencontre le théorème de Stewart avec des applications, la théorie des axes radicaux, celle des droites antiparallèles, la construction des valeurs irrationnelles, quelques lieux géométriques et le problème du cercle tangent à trois cercles donnés.

Digitized by Google

De même, le chapitre consacré aux *transversales*, aux *polaires* et à l'*inversion* renferme tout ce qu'on peut désirer sur ces matières; il est une excellente introduction à la géométrie supérieure. La recherche de la longueur d'une circonférence est précédée d'explications sur ce qu'on peut appeler longueur d'une courbe, et la détermination de π par la méthode des périmètres ou celle des isopérimètres est donnée avec soin, sans prolixité.

Dans la mesure des aires, les auteurs suivent dans le texte la méthode classique; mais une note placée à la fin du volume expose une méthode, due à M. Gérard, qui est affranchie de tout postulat (voir *Mathesis*, 1897, p. 265.)

Les exercices placés à la fin de chaque chapitre sont bien gradués et complètent souvent le Cours; les plus difficiles sont accompagnés d'indications suffisantes pour mettre le lecteur sur la voie de la démonstration. Cette partie de l'ouvrage est, à nos yeux un véritable Cours d'applications géométriques; les auteurs se sont efforcés de la tenir au courant de ce qui a paru dans les recueils périodiques.

L'analyse assez détaillée que nous venons de faire de la Géométrie plane de MM. Gérard et Niewenglowski nous dispense de faire un examen complet de la seconde partie. Nous signalons particulièrement le Livre VIII qui traite géométriquement les courbes usuelles; les propriétés des coniques y sont établies par des procédés très simples. Nos programmes belges ont peut-être le tort de ne pas faire précéder la géométrie analytique de l'étude géométrique des courbes du second ordre.

Les *Compléments* de géométrie dans l'espace comprennent les chapitres suivants : I. Déplacement d'un solide indéformable. II. Divisions homographiques, faisceaux homographiques. III. Involutions. IV. Homologie. V. Propriétés générales des coniques. VI. Propriétés générales des polyèdres. Quatre notes sont consacrées respectivement à la symétrie, aux coordonnées tétraédriques, à la mesure des polyèdres, et au plus court chemin dans l'espace et sur la sphère.

L'exécution typographique du Cours de Géométrie fait honneur aux presses de la maison Carré et Naud. (J. N.)

Note. A cause de l'importance de la Géométrie de MM. B. Niewenglowski et L. Gérard, nous croyons utile d'ajouter au précédent compte rendu, la table détaillée des livres V, VI, VII.

Livre V : *Droites et Plan.* — *Le plan.* Définition, détermination d'un plan. Modes de génération d'un plan. Intersection d'une droite et d'un plan. Exercices. — II. Droites et plans parallèles. — III. Angles de droites non situées dans le même plan. — IV. *Droite et plan perpendiculaires.* Définition et premières propriétés. Théorème des trois perpendiculaires. Lieu des points équidistants de deux points donnés. Perpendiculaire et obliques. Exercices. — V. *Angles dièdres.* Définition. Rectiligne d'un dièdre. Dièdre droit Exercices. — VI. *Plans perpendiculaires.* — VII. *Plans parallèles.* Définition et premières propriétés. Distance de deux plans parallèles. Proportionnalité des segments interceptés par des plans parallèles sur les côtés d'un polygone plan ou gauche. Ces particulier du quadrilatère. Plan bissecteur d'un dièdre. Exercices. — VIII. *Projections*

Digitized by Google

orthogonales. Définitions. Projection d'une droite. Projections de deux droites orthogonales sur un plan parallèle à l'une d'elles. Réciproques. Angle d'une droite et d'un plan. Lignes de pente d'un plan. Projections sur un axe. Perpendiculaire commune à deux droites. Exercices. — IX. *Angles polyèdres*. Définitions. Angles polyèdres symétriques. Trièdres supplémentaires. Angles polyèdres supplémentaires. Propriétés fondamentales des angles polyèdres convexes. Trièdres rectangles. Cas d'égalité des trièdres quelconques. Cas d'égalité des trièdres rectangles. Analogie et différences entre les trièdres et les triangles. Constructions d'un trièdre connaissant les trois faces ou les trois dièdres. Exercices. — X. Rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans. — XI. Translation et rotation.

Livre VI : *Polyèdres*. — I. *Généralités sur les polyèdres*. Définitions. Propriétés des diagonales d'un parallélépipède. Exercices. — II. *Volume du prisme*. Définitions. Mesure du parallélépipède rectangle. Mesure du parallélépipède droit. Mesure du parallélépipède oblique. Mesure du prisme. Exercices. — III. *Volume de la pyramide*. Définitions. Sections faites dans une pyramide par des plans parallèles à la base. Mesure de la pyramide. Tronc de pyramide de première et de deuxième espèce. Tronc de prisme triangulaire. Prismatoïde. Exercices. — IV. *Symétrie*. Définitions Symétrie par rapport à une droite. Symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan. Exercices. — V. *Homothétie et similitude*. Définition de l'homothétie. Conséquences. Définition de la similitude. Conséquences. Décomposition de deux polyèdres semblables en tétraèdres semblables chacun à chacun. Réciproque. Cas de similitude de deux tétraèdres. Rapport des volumes de deux polyèdres semblables. Exercices.

Livre VII : *Les corps ronds*. I. *Notions sur les surfaces coniques, cylindriques et de révolution*. Définitions. Plan tangent. Normale. Exercices. II. *Cylindre et cône de révolution. Aire de la surface latérale, développement, volume*. Cylindre de révolution. Cône de révolution. Tronc de cône de révolution de première et de deuxième espèce. Exercices. — III. *Premières notions sur la sphère*. Définitions. Positions relatives d'une sphère et d'une droite, ou d'un plan. Tangentes. Plans tangents. Cônes circonscrits à une sphère. Mener par une droite un plan tangent à une sphère donnée. Positions relatives de deux sphères. Angle de deux sphères, d'une droite et d'une sphère. Sphères orthogonales. Exercices. — IV. *Aire et volume de la sphère*. Aire d'une zone, ou d'une calotte. Aire de la sphère. Volume engendré par un triangle en tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets, situé dans son plan et ne le traversant pas. Secteur sphérique. Volume de la sphère. Volume engendré par un segment circulaire en tournant autour d'un diamètre qui ne le traverse pas. Segment sphérique à une ou deux bases. Formule de Mac-Laurin. Exercices. — V. *Sphère circonscrite, sphères inscrites à un tétraèdre*. Sphère circonscrite à un tétraèdre. Sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre. Sphères tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche. Exercices. — VI. *Plan radical et plan polaire*. Puissance d'un point par rapport à une sphère. Plan radical. Centre radical. Points conjugués par rapport à une sphère. Plan polaire d'un point, pôle d'un plan. Droites conjuguées par rapport à une sphère. Exercices, — VII. *Systèmes*

Digitized by Google

de sphères. Inversion. Centres d'homothétie de deux sphères. Axes d'homothétie de trois sphères. Plan d'homothétie de quatre sphères. Plans tangents à deux ou à trois sphères. Inversion. Sphères isogonales. Sphères tangentes. Construction des sphères tangentes à quatre sphères données. Cercles inverses. Projections stéréographiques. Sections antiparallèles d'un cône oblique à base circulaire. Exercices. — VIII. *Figures tracées sur la sphère.* Pôles d'un cercle de la sphère. Trouver le rayon d'une sphère solide. Angles sphériques. Cercles orthogonaux; axes radicaux. Polygones sphériques, premières propriétés. Triangles et polygones polaires. Triangles opposés. Cas d'égalité des triangles spériques. Perpendiculaires et obliques. Positions relatives de deux cercles. Constructions. Equivalence des polygones sphériques et des fuseaux. Mesure des polygones sphériques. Rapport anharmonique. Polaires. Centres de similitude de deux cercles sur la sphère. Cercles isogonaux, cercles tangents. Exercices.

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von H. Burkhardt und W. F. Meyer. Band I, Heft 5 (pp. 513-720). Band II, Heft 2/3 (pp. 161-399). Leipzig, Teubner, 1900. Prix : 6 marcs 40, 7 marcs 70.

Ces livraisons ont paru le 29 mai et le 10 avril 1900. Voici l'indication des diverses sections dont elles se composent.

I. *Théorie de Galois et applications*, par C. Hölder, professeur à l'Université de Leipzig (fin) (pp. 513-520).

Groupes finis de substitutions linéaires, par A. Wiman, professeur à l'Université de Lund (522-554).

Théorie (élémentaire) *des nombres*, par P. Bachman, à Weimar (pp. 555-581).

Théorie arithmétique des formes, par K. Th. Vahlen, professeur à l'Université de Königsberg (pp. 582-635).

Théorie analytique des nombres, par P. Bachman (pp. 636-674)

Théorie des corps numériques (Zahlkörper) *algébriques* (pp. 675-693) *et du corps circulaire* (Kreisköper) (pp. 699-714), par D. Hilbert, professeur à l'Université de Goettingue.

Multiplication complexe des fonctions elliptiques, par H. Weber, professeur à l'Université de Strasbourg (pp. 716-720; fin dans la prochaine livraison).

II. *Intégrales définies*, par G. Brunel, professeur à l'Université de Bordeaux (fin) (pp 161-188).

Équations différentielles ordinaires; existence des solutions, par P. Painlevé, professeur à l'Université de Paris (pp. 189-229).

Équations différentielles ordinaires; méthodes élémentaires d'intégration, par Vessiot, professeur à l'Université de Lyon (pp. 230-293).

Équations aux dérivées partielles, par E. von Weber, privat-docent à l'Université de Munich (pp. 293-399).

Les trois livraisons dont nous venons de faire connaître sommairement le contenu compteront parmi les plus remarquables de l'Encyclopédie, parce qu'il n'existe

Digitized by Google

pas jusqu'à présent d'ouvrage traitant sous une forme aussi complètement moderne les sujets qui y sont abordés : la théorie des nombres dans le sens le plus large du mot; la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles. (P. M.)

Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von Dr. Ed. Weber, Privatdocent an der Universität München. Leipzig, Teubner (Gr. in. 8, cartonné de XI-622 pages) Prix : 24 marcs.

La théorie des équations aux dérivées partielles et celle de l'intégration des équations différentielles totales (problème de Pfaff) sont sorties l'une et l'autre du célèbre mémoire de Pfaff (1815). Elles se sont ensuite développées indépendamment l'une de l'autre jusqu'à ce que Lie les a rapprochées au moyen de ces notions fondamentales : élément de surface, transformations de contact.

Dans les traités sur les équations aux dérivées partielles (Graindorge, Mansion, Goursat, Forsyth, Delassus), on n'a pas tenu suffisamment compte des étroites relations qui existent entre ces deux domaines de la science. L'ouvrage actuel met ces relations en pleine lumière et les utilise d'une manière continue dans l'exposé des recherches anciennes, modernes ou très récentes des géomètres.

Sommaire. Préface et chapitre XV. Historique. I. Préliminaires sur les déterminants symétriques gauches. II. Équations linéaires aux dérivées partielles. III-X. Problème de Pfaff. XI. Théorie des transformations de contact. XII-XIV. Équations aux dérivées partielles non linéaires. (P. M.)

Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung gehalten am 22 Juli 1899 von Otto Hölder, o. Professor der Mathematik in Leipzig. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1900 (In 8 de 75 p.). Prix : 2 marcs 40.

Discussion sans conclusion bien nette, mais suggestive et très documentée sur l'origine empirique, abstraite ou subjective des idées géométriques, par le savant successeur de Klein et de Lie à la chaire de Géométrie de Leipzig. Texte du discours (pp. 1-23). Notes et additions (pp. 24-73). Index (pp. 74-75). L'auteur ne dit rien de la Géométrie considérée comme physique mathématique des distances (Cauchy et De Tilly), ce qui est une sérieuse lacune au point de vue philosophique. (P. M)

Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik, mit Berücksichtigung der Anwendungen, von Dr R. Fricke, Professor an der technische Hochschule zu Braunschweig. Analytisch-Functionen theoretischer Teil. Leipzig, Teubner. 1900 (cartonné gr. in 8 de IX-520 pages; 102 fig. dans le texte). Prix : 14 marcs.

Sommaire. — Titre, préface et table des matières (I-IX). I. Séries et intégrales de Fourier. Application à la théorie des cordes vibrantes et à la propa-

Digitized by Google

gation de la chaleur (pp. 1-23). 2. Fonctions sphériques. Application à l'électrostatique. Fonctions cylindriques. Application au problème de Képler. Table des fonctions sphériques et cylindriques (pp. 24-74.) 3. Fonctions d'une variable complexe. Application au mouvement d'un fluide incompressible idéal dans un plan (pp. 75-172). 4. Fonctions elliptiques, avec 11 pages de tables (pp. 173-283). 5. Application des fonctions elliptiques : polygones de Poncelet; trigonométrie sphérique; lignes géodésiques sur l'ellipsoïde de révolution surbaissé; quadriques homofocales; équilibre de la chaleur dans un ellipsoïde; pendule sphérique; rotation d'un corps solide autour d'un point (pp. 284-337). 6. Équations différentielles linéaires ; introduction aux recherches de Riemann, Fuchs, Schwarz, Klein, Thomé, Poincaré (338-424). 7. Équations aux dérivées partielles du premier ordre; application aux équations différentielles de la dynamique (425-514). Index (pp. 515-518). Additions et corrections (pp. 519-520).

L'auteur nous semble avoir parfaitement atteint son double but : 1° donner aux élèves des écoles techniques supérieures des aperçus suffisamment étendus sur les parties de l'analyse qui viennent immédiatement après celles qu'ils ont étudiées dans un cours ordinaire de calcul différentiel et de calcul intégral ; 2° leur montrer que l'analyse supérieure a des applications dans les sciences physiques (*there is no useful mathematical weapon which an engineer may not learn to use*, a dit lord Kelvin). — Deux petites observations : Çà et là, par exemple, dans le chapitre 3, nous avons trouvé trop de représentations géométriques. Ensuite, nous ne signerions pas toutes les appréciations historiques de l'auteur : elles sont trop allemandes.

(P. M.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE SCIENTIFIQUE EN 1899.

Question de Géométrie analytique.

La question posée a été la suivante :

Par un point donné sur une ellipse, on fait passer une série de cercles tangents en ce point à l'ellipse. On mène les tangentes communes aux deux courbes. Quel est le lieu de leur point de rencontre?

Mathesis en a publié deux solutions analytiques dues à M. J. Déprez (*Mathesis*, 1899, pp. 250-252), et deux solutions géométriques dues à M. Gob (*Mathesis*, 1900, pp. 17-19). Des notes placées à la suite de ces articles rappelaient les solutions antérieures de la même question ou d'une question plus générale; elles sont incomplètes, car j'avais perdu de vue en ce moment deux articles que j'avais fait paraître sur le même sujet dans le *Journal de Mathématiques spéciales* de M. *de Longchamps*, en 1885. Le premier de ces articles est intitulé *sur les tangentes communes à un*

Digitized by Google

cercle et à une parabole, le second *sur les tangentes communes à une ellipse et à un cercle.*

Il ne sera pas inutile de reproduire ici une partie du dernier article; je le ferai suivre de l'analyse d'un article de Schröter et de communications de MM. Gob, Absolonne et Mandart sur le même sujet.

I. Pour que deux droites rencontrent une conique en quatre points d'une même circonférence de cercle, il faut et il suffit qu'elles fassent des angles égaux en sens contraire avec un axe de la conique.

Ce théorème bien connu a pour analogue le suivant, dont le rôle, nous semble-t-il, n'a pas été suffisamment apprécié :

Pour que les tangentes menées de deux points à une conique enveloppent un même cercle, la condition nécessaire et suffisante est que ces points soient sur une même conique homofocale à la première.

Voici une démonstration analytique de cette élégante proposition due à Chesles (*Comptes rendus*, t. XVII, 1843). Une droite étant représentée par l'équation $ux + vy + 1 = 0$, nous prenons les quantités u et v pour cordonnées de la droite. Une ellipse E rapportée à ses axes principaux a alors pour équation tangentielle

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'équation tangentielle d'un cercle de centre I (x_0, y_0) et de rayon R est évidemment

$$(x_0u + y_0v + 1)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0. \qquad (2)$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de deux sommets opposés M_1, M_2 du quadrilatère circonscrit au cercle et à l'ellipse. L'équation du cercle pourra aussi prendre la forme

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 - k(x_1u + y_1v + 1)(x_2u + y_2v - 1) = 0. \qquad (3)$$

Si l'on écrit que les équations (2) et (3) ne diffèrent que par un facteur constant l, on trouve l'identité

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 + lR^2(u^2 + v^2)$$
$$\equiv (x_0u + y_0v - 1)^2 + kl(x_1u + y_1v + 1)(x_2u + y_2v - 1) = 0.$$

Les deux membres de cette identité, égalés à zéro, doivent représenter la même courbe. Le premier membre correspond à une conique dont les carrés des demi-axes sont $a^2 + lR^2$, $b^2 + lR^2$; on voit immédiatement que cette conique est homofocale à l'ellipse E. D'après la forme

Digitized by Google

du second membre, la même courbe touche les droites IM_1, IM_2 aux points M_1, M_2. Le théorème est donc démontré.

Réciproquement, *étant données deux coniques homofocales, si de deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, les quatre droites ainsi obtenues enveloppent un même cercle.*

Le théorème de Chasles admet le corollaire suivant :

Si l'on considère tous les cercles touchant deux tangentes fixes M_1N, M_1N' *menées à une ellipse, le lieu du point d'intersection* M_2 *des deux autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à l'ellipse se compose des deux coniques homofocales à* E *et passant par* M_1.

L'hyperbole homofocale menée par M_1 rencontre E en quatre points P, P', P'', P'''. Ces points sont les points de contact de cercles touchant E et les droites M_1N, M_1N'; car ils correspondent à des cercles ayant avec E deux tangentes communes confondues.

Il existe une infinité de cercles touchant E en P; les tangentes communes à l'un de ces cercles et à E se coupent sur l'hyperbole. Nous retrouvons ainsi la solution de la question du concours de 1844 en France, et de 1899 en Belgique.

II. Dans les *Mathematische Annalen*, t. V, p. 50, Schröter a étudié synthétiquement le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites fixes *a*, *b*, *c*, *d*. Nous extrayons de cet article quelques développements qui conduisent au théorème de Chasles.

Désignons par A, B, C les sommets du triangle *abc*, et par A', B', C' les points *ad*, *bd*, *cd*. Soit F un foyer d'une conique U inscrite au quadrilatère *abcd*. L'involution F (AA', BB', CC') jouit de la propriété caractéristique d'être *équilatère*; autrement dit, les angles AFA', BFB', CFC' ont les mêmes bissectrices, lesquelles sont les rayons doubles de l'involution. Cette propriété résulte du théorème que les angles BFC, C'FB' sont égaux ou supplémentaires.

Si F' est le second foyer de U, l'involution B (CC', FF') étant équilatère, B est aussi le foyer d'une conique V inscrite au quadrilatère CFC'F'. Le second foyer de V est B'; car les involutions C (FF', BB') et C' (FF', BB') sont équilatères.

Soient encore G, G' les foyers d'une seconde conique U' inscrite au quadrilatère. De ce que les involutions B (FF', GG'), C (FF', GG'), B' (FF', GG') sont équilatères, on peut conclure que B et B' sont les

Digitized by Google

foyers d'une même conique inscrite au quadrilatère FGF'G' ; en appliquant ensuite la proposition démontrée tantôt, on voit que F et F' sont aussi les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère BGB'G' et, par suite, que les droites F'G, FG' sont les rayons conjugués de l'involution F (AA', BB', CC').

En résumé, la courbe lieu des foyers des coniques inscrites à un même quadrilatère *abcd* est formée de couples de *points conjugués* AA', BB', CC', FF', GG',.... tels que les deux droites joignant un point quelconque de la courbe à ces couples soient des rayons conjugués d'une même involution équilatère. Deux points conjugués quelconques sont toujours les foyers d'une même conique inscrite au quadrilatère ayant pour sommets les points de deux autres couples quelconques de points conjugués.

Pour passer au théorème de Chasles, supposons qu'il existe un cercle W, de centre O, inscrit au quadrilatère *abcd*. Deux points conjugués de la courbe lieu des foyers se trouvent alors réunis en O. Par suite, la conique inscrite au quadrilatère BFB'F' et ayant un foyer en O, a pour second foyer le même point O. Cette conique est donc une circonférence. On en conclut que la somme ou la différence des côtés FB, FB' du quadrilatère BFB'F' est égale à la somme ou la différence des deux autres côtés; donc F et F' sont des foyers d'une conique passant par les points B et B'.

On pourrait aussi dire que F et F' sont les deux foyers d'une conique inscrite au quadrilatère dont deux sommets opposés sont B et B' et dont deux autres sommets opposés se confondent avec O; autrement dit, cette conique touche les droites OB, OB' en B, B'.

Ces deux démonstrations nous ont été communiquées, sous une forme moins explicite, par M. Absolonne.

III. Les développements qui précèdent sont susceptibles de généralisation. On remplace les points cycliques par deux points quelconques, ω et ω' du plan *abcd*; les points conjugués dont il a été question ci-dessus sont alors remplacés par deux sommets opposés du quadrilatère ayant pour côtés les tangentes menées de ω et ω' à une conique quelconque inscrite au quadrilatère ABCD. Le cas particulier où ω et ω' appartiennent à une même conique inscrite au quadrilatère *abcd*, correspond alors au théorème de Chasles.

Digitized by Google

MM. Mandart et Gob nous ont adressé des communications se rapportant à cette généralisation. La question pourra être reprise plus tard dans *Mathesis*. (J. Neuberg.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1215 et 1231.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 104 et 215).

Résoudre les systèmes :

1215. $x^2 = ax + by + cz,$
$y^2 = ay + bz + cx,$
$z^2 = az + bx + cy.$

1231. $x = px^2 + qy^2 + rz^2,$
$y = py^2 + qz^2 + rx^2,$
$z = pz^2 + qx^2 + ry^2.$

Trouver les valeurs des inconnues pour $a = 2, b = 2, c = 1; p = 4, q = -2, r = 1$ *respectivement.* (Emmerich.)

Solution par l'auteur. **1215** Posons, pour abréger,

$$\Sigma x = \xi, \quad \Sigma yz = \eta, \quad xyz = \zeta;$$
$$\Sigma a = \alpha, \quad \Sigma bc = \beta, \quad \alpha^2 - 3\beta = \gamma.$$

En écrivant :

$(a - x)x + by + cz = 0, \ldots, \ldots$, on a $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, ou

$$\begin{vmatrix} a - x & b & c \\ c & a - y & b \\ b & c & a - z \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a\alpha - \beta)\xi - a\eta + \zeta = \alpha\gamma. \tag{1}$$

L'addition des trois équations donne

$$2\eta = \xi^2 - \alpha\xi. \tag{2}$$

En multipliant les équations du système deux à deux et en faisant la somme, on trouve

$$\eta^2 - 2\xi\zeta = \beta\xi^2 + \gamma\eta. \tag{3}$$

De (1) et (2), on déduit

$$2\zeta = a\xi^2 - (3a\alpha - 2\beta)\xi + 2\alpha\gamma. \tag{4}$$

Digitized by Google

Avec les valeurs (2) et (4), l'équation (3) prend la forme

$$\xi^4 - 2(\alpha + 2a)\,\xi^3 - (\alpha^2 - 12a\alpha + 6\beta)\,\xi^2 - 6\alpha\gamma\xi = 0.$$

La solution $\xi = 0$ de cette équation est à écarter; elle conduirait à $\eta = 0$, $\zeta = \alpha\gamma$ de sorte que x, y, z seraient proportionnelles aux racines cubiques de l'unité, ce qui n'est pas d'accord avec les équations proposées où a, b, c sont des quantités données quelconques. En remarquant la solution évidente $\xi = 3\alpha$, $x_2 = y_2 = z_2 = \alpha$ on pourra débarrasser l'équation cubique du facteur $\xi - 3\alpha$ et il restera

$$\xi^2 + (\alpha - 4a)\,\xi + 2\gamma = 0.$$

Avec les expressions (2) et (4) on trouve ainsi deux groupes de valeurs ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 qu'on substituera dans l'équation $t^5 - \xi t^2 + \eta t - \zeta = 0$.

Dans l'exemple numérique on a

$$a = 2,\ b = 2,\ c = 1; \quad \alpha = 5,\ \beta = 8,\ \gamma = 1;$$

$$\xi_1 = 2,\ \eta_1 = -3,\ \zeta_1 = -5; \quad \xi_2 = 1,\ \eta_2 = -2,\ \zeta_2 = -1;$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0; \quad x_2 = y_2 = z_2 = 5;$$

$$x_3 = y_4 = z_5 = 2{,}37720 \qquad x_6 = y_7 = z_8 = 1{,}80194$$

$$y_4 = y_5 = z_3 = 1{,}27389 \qquad x_7 = y_8 = z_6 = 0{,}44504$$

$$x_5 = y_3 = z_4 = -1{,}65109; \qquad x_8 = y_6 = z_7 = -1{,}24698.$$

1231. On pourrait procéder directement d'une manière analogue à la précédente, mais il est préférable de réduire le problème au n° 1215. En effet, si l'on pose

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pq = \Delta,$$

$$p^2 - qr = a\Delta, \quad r^2 - pq = b\Delta, \quad q^2 - rp = c\Delta,$$

les deux systèmes sont identifiés.

Reste seulement à traiter l'exemple numérique : $p = 4$, $q = -2$, $r = 1$. On trouve successivement

$$\Delta = 81, \quad a = \tfrac{2}{9}, \quad b = \tfrac{1}{9}, \quad c = 0;$$

$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = \tfrac{2}{81}, \quad \gamma = \tfrac{1}{27};$$

$$\xi^2 - \tfrac{5}{9}\xi + \tfrac{2}{27} = 0;$$

$$\xi_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = -\tfrac{1}{243};$$

Digitized by Google

$$\xi_2 = \tfrac{8}{9}, \quad \eta_2 = -\tfrac{1}{81}, \quad \zeta_2 = -\tfrac{1}{729};$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0; \quad x_2 = y_2 = z_2 = \tfrac{1}{3};$$

$$x_3 = y_3 = z_3 = 0{,}28134 \qquad x_6 = y_7 = z_8 = -0{,}08910$$

$$x_4 = y_5 = z_5 = 0{,}14970 \qquad x_7 = y_8 = z_6 = 0{,}24966$$

$$x_5 = y_5 = z_4 = -0{,}09771; \qquad x_8 = y_6 = z_7 = 0{,}06166.$$

NOTE. M. GOB a également résolu la question 1231 en la ramenant à la question 1215 et en formant l'équation qui a pour racines x, y, z. Il observe que cette méthode est en défaut lorsque $\Delta = 0$, c'est-à-dire dans l'hypothèse $p + q + r = 0$; pour ce cas, il indique la solution suivante :

En additionnant les équations du système on trouve $x + y + z = 0$. Donc si l'on adopte les notations de M. Emmerich, on a

$$\Sigma x^2 = -2\eta, \quad \Sigma x^3 = 3\zeta, \quad \Sigma x^4 = 2\Sigma x^2 y^2 = 2\eta. \qquad (a)$$

Multiplions les équations proposées par x^2, y^2, z^2 et ajoutons les résultats; nous aurons, eu égard aux égalités (a),

$$3\zeta = p\eta^2. \qquad (b)$$

Multiplions encore les équations proposées par x, y, z et faisons la somme des produits; en posant

$$x^2y + y^2z + z^2x = \lambda, \quad xy^2 + yz^2 + zx^2 = \mu,$$

le résultat prend la forme

$$-2\eta = 3p\zeta + q\mu + r\lambda. \qquad (c)$$

Si l'on multiplie les équations du système respectivement par y^2, z^2, x^2 ou par z^2, x^2, y^2 et qu'on ajoute chaque fois les produits, on obtient

$$\mu = q\eta^2, \quad \lambda = r\eta^2. \qquad (d)$$

Remplaçons ζ, μ, λ par les valeurs (b) et (d) dans l'équation (c); il vient

$$-2\eta = (p^2 + q^2 + r^2)\,\eta^2;$$

d'où la solution $\eta = 0$, qui correspond au système de valeurs $x = y = z = 0$, et la solution

$$\eta = -\frac{2}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

L'équation (b) fait connaître ζ, et l'équation du troisième degré qui a pour racines x, y, z, est

$$x^3 - \frac{2}{p^2 + q^2 + r^2}x + \frac{4p}{3(p^2 + q^2 + r^2)^2} = 0.$$

Digitized by Google

×Question 1288.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 216.)

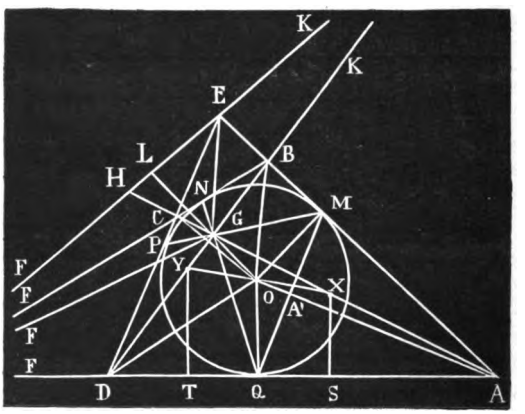
Soient Q *la surface d'un quadrilatère convexe* ABCD, *circonscrit a un cercle*; *a*, *b*, *c*, *d les distances des sommets aux points de contact adjacents*, T *la surface du triangle qui a pour sommets les points de concours* E, F, G *des côtés opposés et des diagonales*; T_1 *la surface du triangle dont les côtés sont dirigés suivant les lignes* AC, BD, EF; *m la droite qui joint les milieux des diagonales. Démontrer les formules*

$$4m^2 = (a+b+c+d)\left[\frac{(a-c)^2}{a+c}+\frac{(b-d)^2}{b+d}\right],$$

$$\frac{T}{Q}=\frac{2abcd}{(ab-cd)(ad-bc)}, \qquad \frac{T_1}{Q}=\frac{4abcd}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}.$$

(J. Neuberg.)

De bonnes solutions de cette question nous ont été adressées par MM. Emmerich, Couturier, Critesco et Plakhowo. Comme elles sont susceptibles de simplifications ou qu'elles s'appuient sur des formules peu connues (*), nous profitons de l'occasion pour exposer une théorie



assez complète du quadrilatère circonscriptible; nous n'emploierons que la géométrie pure.

Soient r, O le rayon et le centre du cercle inscrit; M, N, P, Q les

(*) M. Plakhowo invoque des formules de Dostor (*Propriétés nouvelles des quadrilatères en général*, pp. 53, 55, 156). Nous n'avons pas eu l'occasion de comparer nos démonstrations à celles de M. Dostor.

Digitized by Google

points de contact des côtés AB, BC, CD, DA; a', b', c', d' les distances OA, OB, OC, OD; f, g les diagonales AC, BD; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Les données étant a, b, c, d, il s'agit de trouver les autres éléments du quadrilatère ABCD.

1. Les triangles AOB et COD, BOC et DOA ayant des angles supplémentaires en O et même hauteur r, on a

$$\frac{a'b'}{c'd'} = \frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b'c'}{d'a'} = \frac{b+c}{d+a}; \tag{1}$$

d'où, par multiplication et par division,

$$\frac{b'^2}{d'^2} = \frac{(b+a)(b+c)}{(d+a)(d+c)}, \quad \frac{a'^2}{c'^2} = \frac{(a+b)(a+d)}{(c+b)(c+d)}. \tag{2}$$

2. La dernière relation peut s'écrire

$$\frac{a^2+r^2}{c^2+r^2} = \frac{a^2+a(b+d)+bd}{c^2+c(b+d)+bd}.$$

Retranchons chaque numérateur du dénominateur correspondant, puis divisons les deux dénominateurs par le facteur commun $c-a$; il vient

$$a'^2 = a^2 + r^2 = \frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{\Sigma a}. \tag{3}$$

Un calcul facile donne ensuite

$$r^2 = \frac{\Sigma abc}{\Sigma a}. \tag{4}$$

$$Q = r\,\Sigma a = \sqrt{\Sigma a \,.\, \Sigma abc}. \tag{5}$$

3. Dans ce qui suit, nous nous appuyerons sur le lemme que voici : *Si les angles de deux triangles* ABC, A'B'C' *vérifient les égalités* $A + A' = 180^\circ$, $B = B'$, *on a entre les côtés les relations*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad aa' = bb' + cc'. \tag{6}$$

Pour les démontrer, transportons le triangle A'B'C' de manière que A' coïncide avec A et que AC' se place sur AC, AB' sur le prolongement de BA, ce qui est possible à cause de $A + A' = 180^\circ$; menons ensuite par C une parallèle à C'B', qui coupe AB' en D. Le triangle CBD sera isoscèle; donc CD = CB. La proportion CD : C'B' = AC : AC'

Digitized by Google

revient à $a : a' = b : b'$. Une propriété connue du triangle isoscèle donne aussi

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + BA \cdot AD \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c \cdot \frac{ac'}{a'}.$$

Multipliant par a' et remplaçant ba' par $b'a$ on trouve $aa' = bb' + cc'$.

Cela posé, les cordes MP, NQ passant par G, les triangles AGM, CGP ont un angle égal en G et des angles supplémentaires en M et P; de là et par analogie

$$\frac{AG}{CG} = \frac{a}{c}, \quad \frac{BG}{DG} = \frac{b}{d};$$

par conséquent

$$AG = \frac{af}{a+c}, \quad CG = \frac{cf}{a+c}, \quad BG = \frac{bg}{b+d}, \quad DG = \frac{dg}{b+d}. \qquad (7)$$

On trouve semblablement ou en considérant les divisions harmoniques ACGH, BDGK :

$$\frac{HC}{HA} = \frac{c}{a}, \quad HC = \frac{cf}{a-c}, \quad HA = \frac{af}{a-c}, \text{ etc.} \qquad (7')$$

4. On voit facilement que

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{AG}{CG} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\delta}{\beta} = \frac{BG}{DG} = \frac{b}{d};$$

et comme $Q = \alpha + \gamma = \beta + \delta$, on a

$$\alpha = \frac{cQ}{a+c}, \quad \gamma = \frac{aQ}{a+c}, \quad \beta = \frac{dQ}{b+d}, \quad \delta = \frac{bQ}{b+d}. \qquad (8)$$

On peut encore calculer aisément les aires des triangles AGB, BGC,...; par exemple

$$\frac{AGB}{BG} = \frac{AGD}{DG} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{AGB}{ab} = \frac{BGC}{bc} = \frac{CGD}{cd} = \frac{DGA}{da} = \frac{Q}{(a+c)(b+d)}. \qquad (9)$$

5. Pour calculer les diagonales, nous appliquons le théorème de Stewart aux deux triangles ADB, CDB; en remplaçant DG, BG, AG, CG par les valeurs (7), nous aurons

$$(a+b)^2 d + (a+d)^2 b = \frac{a^2(b+d)}{(a+c)^2} f^2 + \frac{bd}{b+d} g^2,$$

$$(b+c)^2 d + (c+d)^2 b = \frac{c^2(b+d)}{(a+c)^2} f^2 + \frac{bd}{b+d} g^2.$$

Digitized by Google

Retranchons ces égalités membre à membre et supprimons le facteur commun $a - c$ qui s'aperçoit immédiatement si l'on combine les termes de même rang des deux égalités ; il vient

$$f^2 = (a+c)^2 + 4\,\frac{a+c}{b+d}\,bd,$$

et de même

$$g^2 = (b+d)^2 + 4\,\frac{b+d}{a+c}\,ac.$$

Il en résulte

$$f^2 + g^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 + 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a. \quad (10)$$

6. Introduisons cette valeur dans la relation

$$4m^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 + (d+a)^2 - f^2 - g^2;$$

nous aurons

$$4m^2 = \Sigma^2 a - 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a.$$

$$= \Sigma a\left(a + c - \frac{4ac}{a+c} + b + d - \frac{4bd}{b+d}\right),$$

ce qui revient à la première formule proposée.

Un calcul anologue donne pour les lignes p, q qui joignent les milieux des côtés opposés AB, CD ou ceux de AB, BC :

$$4p^2 = (a+d-b-c)^2 + 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a,$$

$$4q^2 = (a+b-c-d)^2 + 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a.$$

On en déduit $p^2 - q^2 = (a-c)(d-b)$.

7. Nous indiquons d'abord le calcul des aires T, T_1 pour un quadrilatère quelconque, en fonction des aires α, β, γ, δ. On a

$$T = CEF + CFG + CGE,$$

$$\frac{CEF}{\alpha} = \frac{EC}{CD}\cdot\frac{FC}{CB}, \quad \frac{CFG}{\delta} = \frac{FC}{CB}\cdot\frac{CG}{CA}, \quad \frac{CGE}{\beta} = \frac{EC}{CD}\cdot\frac{CG}{CA}.$$

Or, les triangles BCA, BDA sont entre eux comme leurs hauteurs issues de C, D ou comme EC est à ED; donc

$$\frac{\delta}{EC} = \frac{\gamma}{ED} = \frac{\gamma - \delta}{CD}, \quad \text{ou} \quad \frac{EC}{CD} = \frac{\delta}{\gamma - \delta}.$$

Digitized by Google

Semblablement

$$\frac{FC}{CB}=\frac{\beta}{\gamma-\beta},\quad \frac{CG}{CA}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma};$$

par conséquent,

$$CEF=\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)},\quad CFG=\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma-\beta)(\gamma+\alpha)},$$

$$CGE=\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma-\delta)(\gamma+\alpha)};$$

et, en additionnant,

$$T=\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)(\gamma+\alpha)}.$$

Si l'on remplace $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les valeurs (8) on obtient la seconde formule de la question

8. On a

$$\frac{T_1}{Q}=\frac{HG}{CA}\cdot\frac{KG}{BD}.$$

Or

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{CG}{GA}=\frac{HC}{HA},\quad \text{d'où}\quad \frac{CG}{CA}=\frac{\alpha}{\gamma+\alpha},\quad \frac{HC}{CA}=\frac{\alpha}{\gamma-\alpha};$$

par suite

$$\frac{HG}{CA}=\frac{CG}{CA}+\frac{HC}{CA}=\frac{2\alpha\gamma}{\gamma^2-\alpha^2},\quad \frac{KG}{BD}=\frac{2\beta\delta}{\beta^2-\delta^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{T_1}{Q}=\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\gamma^2-\alpha^2)(\beta^2-\delta^2)}.$$

Remplaçons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les valeurs (8), etc.

9. Appelons x, y les distances des milieux X, Y des diagonales au côté AD; comme ce sont les moitiés des hauteurs des triangles ABD, ACD, on a

$$x=\frac{\gamma}{a+d}=\frac{aQ}{(a+d)(a+c)},\quad y=\frac{dQ}{(a+d)(b+d)}.$$

Par conséquent,

$$(a+c)x+(b+d)y=Q=r(a+b+c+d),$$

et

$$r=\frac{(a+c)x+(b+d)y}{(a+c)+(b+d)}.$$

Digitized by Google

Si l'on avait abaissé les perpendiculaires x, y sur un autre côté du quadrilatère, on aurait trouvé le même résultat. On en conclut que le centre O divise la droite XY dans le rapport $\frac{b+d}{a+c}$.

10. Cherchons la puissance du point G par rapport au cercle O. Elle a pour valeur absolue [(voir la seconde formule (6)] :

$$GP \cdot GM = GC \cdot GA - CP \cdot AM$$

$$= \frac{acf^2}{(a+c)^2} - ac = \frac{ac}{(a+c)^2}[f^2 - (a+c)^2] = \frac{4abcd}{(a+c)(b+d)}.$$

On trouve de même pour la puissance du point H

$$HP \cdot HQ = HC \cdot HA - CP \cdot AQ = \frac{ac}{(a-c)^2}[f^2 - (a-c)^2].$$

$$= \frac{4ac \cdot \Sigma abc}{(a-c)^2(b+d)}.$$

11. G étant le pôle de EF par rapport au cercle O, la droite GO est perpendiculaire à EF, et les aires des triangles EFG, EFO se déduisent facilement l'une de l'autre. En effet,

$$\frac{GEF}{OEF} = \frac{GL}{OL} = 1 - \frac{OG}{OL} = 1 - \frac{OG^2}{OG \cdot OL} = 1 - \frac{\overline{OG}^2}{r^2} = \frac{r^2 - \overline{OG}^2}{r^2};$$

or $r^2 - \overline{OG}^2$ est la valeur absolue de la puissance de G que nous avons déterminée plus haut. On trouve

$$OEF = \frac{(a+c)(b+d)r^2}{2(ab-cd)(ad-bc)}. \text{ (*)}$$

12. Cherchons maintenant les côtés et la surface Q' du quadrilatère MNPQ (**). Si MQ rencontre AO en A', on a

$$OM \cdot MA = OA \cdot MA', \quad \overline{OM}^2 = OA' \cdot OA;$$

d'où

$$MQ = \frac{2ar}{a'}, \quad OA' = \frac{r^2}{a'}.$$

(*) M. Emmerich a suivi la marche inverse: il calcule directement l'aire OEF, puis en déduit T.

(**) M. Emmerich cherche l'aire Q' au moyen de la trigonométrie, puis en déduit T_1 en remarquant que le triangle HGK est par rapport au quadrilatère MNPQ le triangle T de la question 1230 résolue p. 74.

Digitized by Google

La surface OMQ est donc égale à $ar^3 : a'^2$. Par suite :

$$Q' = r^5\left(\frac{a}{a'^2}+\frac{b}{b'^2}+\frac{c}{c'^2}+\frac{d}{d'^2}\right),$$

$$= \frac{r^5\Sigma a}{\lambda}\Sigma a\,(b+c)\,(c+d)\,(d+b),$$

ou

$$\lambda = (a+b)\,(a+c)\,(a+d)\,(b+c)\,(b+d)\,(c+d).$$

Mais

$$\Sigma a\,(b+c)\,(c+d)\,(d+b)$$
$$= \Sigma a\,[2bcd + bc\,(b+c) + cd\,(c+d) + bd\,(b+d)]$$
$$= 8abcd + 2\Sigma abc\,(a+b+c) = 2\Sigma a\,.\,\Sigma abc;$$

il en résulte

$$Q' = \frac{2r^5\,\Sigma^2 a\,\Sigma abc}{\lambda}.$$

Si l'on observe que

$$a'b'c'd' = \frac{\lambda}{\Sigma^2 a},\quad \Sigma abc = r^2\Sigma a,\quad Q = r\Sigma a,$$

on peut encore écrire

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{2r^4}{a'b'c'd'} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}.$$ (J. N.)

Question 1959.

(Voir *Mathesis* (2), t. X, p. 56).

On donne une circonférence C^2, *dont le centre est* C, *et un de ses points* P. *Soit* M *un point mobile sur* C^2. *Si nous appelons r la parallèle conduite par* M *au diamètre qui passe par* P, *s la parallèle conduite par le même point à la tangente en* P, *d le diamètre passant par* M, *t la tangente en* M *à* C^2 *et t' la parallèle conduite par* C *à t; en considérant les intersections des droites r, s, d, t, t' avec la circonférence* γ^2 *qui a pour centre* M *et pour rayon* MP. *Démontrer que :* 1° *le lieu des intersections de r et* γ^2 *est un trifolium droit.*

2° *le lieu des intersections de s et* γ^2 *est un folium double.*

3° *les lieux des intersections de* γ^2 *avec d, t ou t' sont des sextiques tricirculaires. Étudier leurs formes et indiquer leurs points multiples.*

(Cardoso-Laynes).

Digitized by Google

Solution par M. V. Retali. 1° Les deux points (γ^2, r) sont vus du point P sous un angle droit et tombent sur une parallèle à CP; leur lieu est donc le *trifolium droit*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(y^2 - x^2)x;$$

CP est l'axe, P le point triple.

2° Les points (γ^2, s) sont vus de P sous un angle droit, et placés sur une perpendiculaire à CP; leur lieu est donc le *bifolium*

$$(x^2 + y^2)^2 + 8xy^2 = 0;$$

CP est l'axe, P le point triple (*spécial*). Nous avons pris P pour origine et CP pour axe des coordonnées rectangulaires, le rayon de C^2 égal à l'unité. Ces deux théorèmes sont connus; voir le mémoire de M. Brocard, *Le Trifolium* (JMS, 1891, *Mathesis*, 1892, Suppl. p. 28 et 31, ou la *Géométrie analytique* de M. de Longchamps, 1894, t. II, p. 571).

3° *a*) Etant donnés dans un plan deux points fixes C et P, faisons correspondre à un point M, les deux points M_1, M_2 où la droite CM est coupée par le cercle ayant son centre en M et passant par P. Lorsque M décrit une courbe Σ, le lieu des points M_1, M_2 est une autre courbe Σ' appelée *strophoïdale*(*) de Σ par rapport aux pôles C et P. Si l'on prend CP pour axe des x, C pour origine des coordonnées rectangulaires et CP $= a$, les formules de la transformation (double, du troisième ordre et genre un) sont

$$\xi : \eta : 1 = x(x^2 + y^2 - a^2) : y(x^2 + y^2 - a^2) : 2(x^2 + y^2 - ax);$$

la strophoïdale du cercle $\xi^2 + \eta^2 = 1$, par rapport aux pôles C, P est donc

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4(x^2 + y^2 - x)^2 = 0,$$

ou bien

$$(x^2 + y^2)^3 - 6(x^2 + y^2)^2 + 8x(x^2 + y^2) + (y^2 - 3x^2) = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

Cette courbe est l'inverse, par rapport à C, de la quartique circulaire

$$(y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2) + 8x(x^2 + y^2) - 6(x^2 + y^2) - 1 = 0,$$

qui a un point triple en P; avec les notations usuelles nous avons donc

$$m = 4,\ n = 6,\ f = 2,\ f' = g' = g = p = q = 0$$

et, par suite,

$$M = 2m - f = 6, \quad N = n + 2m - 2f = 10,$$
$$F = 2m - f = 6, \quad G' = m - f = 2.$$

(*) *Mathesis*, 1894, p. 138-141.

Digitized by Google

La sextique (1) est donc de sixième classe, a deux points triples aux points circulaires, un autre point triple en P et un point double en C, dont les tangentes forment un angle de 60° (voir fig. 1).

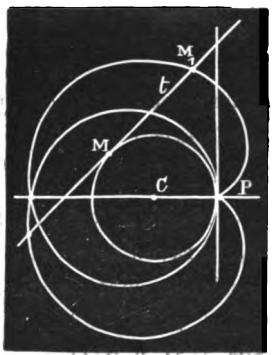


Fig. 1.

b) Avec les mêmes axes, si l'on fait $CP = 1$, $MCP = \theta$, les coordonnées des points (γ^2, t) sont

$$x = \cos\theta \pm 2 \sin\theta \sin\frac{\theta}{2},$$

$$y = \sin\theta \pm 2 \cos\theta \sin\frac{\theta}{2};$$

éliminant θ, nous trouvons pour équation du lieu

$$[(x^2+y^2-3)^2-4](x^2+y^2-1)+(x^2+y^2+2x-3)^2=0;$$

et prenant P pour origine,

$$(x^2+y^2)^3+6x(x^2+y^2)^2+3(x^2+y^2)(3x^2-y^2)-8xy^2=0 \ldots\ldots (2)$$

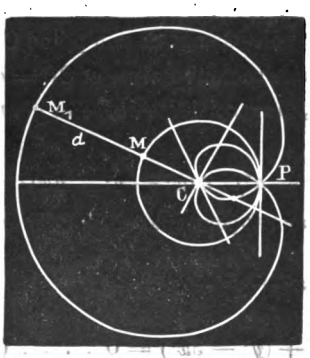


Fig. 2.

Le lieu est donc une sextique symétrique par rapport à CP, avec deux points triples ordinaires aux points cycliques, un nœud au point (— 3,0) et un point triple *spécial* en P, formé par la coïncidence de deux nœuds avec un rebroussement. — On peut aussi déterminer ces caractéristiques en observant que la courbe (2) est l'inverse, par rapport à P, de la cubique rationnelle parabolique

$$(1+3x)^2 = (8x+3)y^2;$$

nous avons donc $m = 3$, $n = 4$, $g = 1$, $f = f' = g' = p = q = 0$ et, par suite,

$$M = 2m = 6, \quad N = n + 2m - g = 9,$$

$$F = 2m = 6, \quad G' = m = 3, \quad P = g = 1;$$

sixième ordre, neuvième classe, deux points triples ordinaires aux points circulaires, un point triple avec une coïncidence à l'origine (voir fig. 2).

Digitized by Google

c) Si M_1 est un point correspondant à M et si MCP $= \omega$, nous avons

$$\overline{CM_1}^2 = \rho^2 = \overline{MP}^2 - 1 = 4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

l'équation polaire du lieu cherché est donc

$$\rho^2 = 1 + 2\sin\omega,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2+y^2)^3 - 2(x^2+y^2)^2 + x^2 - 3y^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Observant que cette sextique est l'inverse, par rapport au centre C, de la quartique circulaire binodale

$$(x^2 - 3y^2)(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2) + 1 = 0,$$

on a $m = 4$, $n = 8$, $f = 2$, $f' = g' = g = p = q = 0$; donc

$$M = 2m - f = 6, \quad N = n + 2m - 2f = 12,$$
$$F = 2m - f = 6, \quad G' = m - f = 2.$$

La courbe (3) est donc du sixième ordre et de la douzième classe; elle a deux points triples ordinaires aux points circulaires, un nœud à l'origine C; ses deux autres points doubles sont ceux de la quartique inverse, savoir $(\pm 1, 0)$. Le point double C est *bitangentiel* et ses tangentes forment un angle de 60° (voir fig. 3).

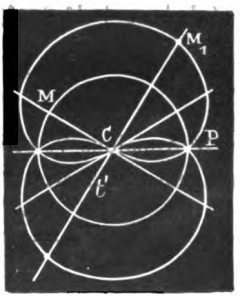


Fig. 3.

Note. D'autres bonnes solutions de la même question nous ont été adressées par MM. Couturier, Fairon et Rose; nous regrettons que le défaut de place nous empêche de les reproduire.

×Question 1268.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 104.)

Un triangle scalène tourne successivement autour de la bissectrice extérieure de chacun de ses angles. Comparer les trois volumes engendrés ainsi que leurs surfaces.

Même question en prenant pour axe de révolution la tangente menée par l'un des sommets au cercle circonscrit.

(J. Neuberg.)

Digitized by Google

Solution par M. M. VIGNERY (Bouillon) et PLAKHOWO. 1° Soient r, r' les distances des points B et C à la bissectrice extérieure de l'angle A, V_a et S_a le volume et la surface qui correspondent à cette droite prise pour axe de révolution, T la surface du triangle ABC. Un théorème connu donne

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h_a a (r + r') = \frac{2}{3}\pi T (b + c) \cos\frac{A}{2}.$$

Par conséquent

$$V_a : V_b : V_c = (b + c)\cos\frac{A}{2} : (c + a)\cos\frac{B}{2} : (a + b)\cos\frac{C}{2}.$$

2° $$\begin{aligned} S_a &= \text{surf. BC} + \text{surf. CA} + \text{surf. AB} \\ &= \pi a (r + r') + \pi r' b + \pi r c \\ &= \pi (ab + ac + b^2 + c^2)\cos\frac{A}{2}. \end{aligned}$$

D'où l'on conclut

$$\frac{S_a}{(ab + ac + b^2 + c^2)\sqrt{a(p - a)}} = \frac{S_b}{(bc + ba + c^2 + a^2)\sqrt{b(p - b)}} = \frac{S_c}{(ca + cb + a^2 + b^2)\sqrt{c(p - c)}}$$

3° Appelons V'_a et S'_a le volume et la surface qui correspondent à la tangente en A prise pour axe de révolution. On trouve

$$V'_a = \frac{2}{3}\pi S (b \sin B + c \sin C) = \frac{2}{3}\pi S \frac{b^2 + c^2}{2R}.$$

Donc

$$V'_a : V'_b : V'_c = (b^2 + c^2) : (c^2 + a^2) : (a^2 + b^2).$$

4° $$\begin{aligned} S'_a &= \pi a (b \sin B + c \sin C) + \pi b^2 \sin B + \pi c^2 \sin C \\ &= \frac{\pi}{2R}(ab^2 + ac^2 + b^3 + c^3). \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{S'_a}{ab^2 + ac^2 + b^3 + c^3} = \frac{S'_b}{bc^2 + ba^2 + c^3 + a^3} = \frac{S'_c}{ca^2 + cb^2 + a^3 + b^3}.$$

M. EMMERICH a résolu la même question au moyen du théorème de Guldin, et indiqué les inégalités qui suivent dans la note.

Digitized by Google

NOTE. Supposons $a > b > c$, et par suite $\frac{A}{2} > \frac{B}{2} > \frac{C}{2}$. Nous aurons

$$b + c < c + a < a + b, \quad \cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2} < \cos\frac{C}{2};$$

il en résulte

$$V_a < V_b < V_c.$$

De même, de

$$b^2 + c^2 < c^2 + a^2 < a^2 + b^2,$$

on déduit

$$V'_a < V'_b < V'_c.$$

On a $S_a < S_b < S_c$. En effet,

$$\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2} < \cos\frac{C}{2},$$

et

$$a(b + c) + b^2 + c^2 < b(c + a) + c^2 + a^2,$$

car, cette inégalité revient à

$$c(a - b) < a^2 - b^2, \quad \text{ou} \quad c < a + b.$$

Enfin, $S'_a < S'_b < S'_c$; car l'inégalité

$$ab^2 + ac^2 + b^3 + c^3 < a^2b + bc^2 + a^3 + c^3,$$

se ramène successivement aux suivantes :

$$c^2(a - b) < a^3 - b^3 + ab(a - b), \quad c^2 < (a + b)^2. \qquad \text{(J. N.)}$$

×QUESTIONS D'EXAMEN.

956(*). Quel segment sphérique a même volume qu'un cylindre de même base et hauteur ?

Désignant la hauteur par h, on a

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \pi h^2(2r - h), \quad h = \tfrac{3}{4}r.$$

957. Le périmètre de la section méridienne d'un tronc de cône droit étant $2p$ et la hauteur h, on a pour sa surface totale $S = \frac{1}{2}\pi(p^2 - h^2)$.

Car
$$\begin{aligned} S &= \pi[R^2 + r^2 + (R + r)s] \\ &= \tfrac{1}{2}\pi[(R + r)^2 + 2s(R + r) + (R - r)^2] \\ &= \tfrac{1}{2}\pi\left\{(R + r + s)^2 - [s^2 - (R - r)^2]\right\} = \tfrac{1}{2}\pi(p^2 - h^2). \end{aligned}$$

(*) Les questions 956-960 (avec leurs réponses) sont dues à M. Emmerich.

Digitized by Google

958. Résoudre le système :

$$x + y = 2a, \quad x^7 + y^7 = 2a^7.$$

En posant $x = a(1+z)$, $y = a(1-z)$, on a $(1+z)^7 + (1-z)^7 = 2$; d'où $z^2(z^4 + 5z^2 + 3) = 0$.

959. Déterminer deux nombres, connaissant leur somme a et sachant que la somme de leurs septièmes puissances égale la septième puissance de leur somme.

Les nombres $\frac{a}{2}(1+z)$, $\frac{a}{2}(1-z)$ doivent satisfaire à l'équation $(1+z)^7 + (1-z)^7 = 2^7$, laquelle peut s'écrire $(z^2-1)(z^2+3)^3 = 0$.

960. Résoudre le système :

$$x : y : z = y - z : z - x : x - y.$$

On a successivement

$$\frac{x}{y-z} = \frac{y}{z-x} = \frac{z}{x-y}; \quad \frac{y+z}{z-y} = \frac{z+x}{x-z} = \frac{x+y}{y-x};$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}; \quad x^3 = y^3 = z^3. \quad x, y, z \text{ sont égaux, ou}$$

l'on a $x : y : z = 1 : \theta : \theta^2$, θ, θ^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

961. Soient α et β deux arcs, d'extrémités différentes, vérifiant l'équation

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Calculer $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

1° De

$$a \cos\alpha + b \sin\alpha = c = a \cos\beta + b \sin\beta,$$

on conclut

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a};$$

connaissant $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, on trouve facilement

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

2° L'équation proposée se résout en posant $b = a \operatorname{tg}\varphi$; on trouve

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Si γ est l'un des arcs ayant pour cosinus $\frac{c}{a}\cos\varphi$, on aura toutes les solutions au moyen des formules

$$\alpha = \varphi + 2k\pi + \gamma, \quad \beta = \varphi + 2k'\pi - \gamma,$$

Digitized by Google

d'où

$$\alpha + \beta = 2\varphi + 2(k + k')\pi, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos 2\varphi, \quad \text{etc.}$$

(*Journal de Vuibert.*)

On peut de même se proposer de calculer les valeurs de

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\gamma, \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin 2\gamma, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} 2\gamma.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1281.** Soient I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC, et soient (I', II''), (I'_a, I''_a), ··· les projections de ces points sur la base BC et sur la médiatrice de BC. Si la base BC est fixe et si l'angle opposé A est constant, les cercles $I'I''A$, $I'_aI''_aA$ passent par un même point fixe; les cercles $I'_bI''_bA$, $I'_cI''_cA$ passent par un second point fixe. (J. Déprez.)

1282. X, Y, Z sont trois points dans le plan d'un triangle ABC tels, que les droites AY et AZ, BZ et BX, CX et CY soient, respectivement, symétriques par rapport aux bissectrices AI, BI, CI du triangle ABC. On fait parcourir à Y une droite donnée u_b, à Z une droite donnée u_c. Démontrer les propositions suivantes :

1° Le lieu de X est une droite u_a.

2° Si u_b est perpendiculaire à CA et u_c à AB, u_a est perpendiculaire à BC.

3° Les droites u_a, u_b, u_c forment un triangle homologique à ABC.

4° Les droites AX, BY, CZ concourent sur une conique circonscrite au triangle ABC et passant par le centre d'homologie des triangles ABC, $u_au_bu_c$.

5° Étant donné ce centre d'homologie, les droites u_a, u_b, u_c peuvent varier de manière qu'elles se coupent en un même point; le lieu de ce point est une cubique. (J. A. Third.)

1283. On circonscrit à une ellipse donnée tous les quadrilatères ABCD dont les diagonales AC, BD sont rectangulaires; soient P, Q les points de rencontre des côtés opposés (AB, CD), (AD, BC). Trouver 1° la relation entre les points P, Q; 2° la relation entre les droites PQ, AC; 3° la relation entre le point P et la droite AC.

On appelle *liaison ponctuelle* l'ensemble des couples de points satisfaisant à une même condition; *liaison tangentielle*, l'ensemble des couples de droites satisfaisant à une même condition; *connexe*, l'ensemble des cou-

Digitized by Google

ples constitués par un point et une droite et qui satisfont à une même condition.

1284. On donne un cercle K^2 dont le diamètre AB = 2 et le centre O, et une ellipse E^2 dont les foyers sont O, B et le grand axe $\sqrt{3}$: si une tangente mobile de l'ellipse coupe le cercle aux deux points P, P', démontrer que le lieu du point d'intersection des droites AP', BP est une courbe du quatrième ordre et de la huitième classe ayant ses deux nœuds en A et B. Déterminer la tangente en un point, les huit bitangentes ; les tangentes aux points doubles et les quatre tangentes issues de chacun de ces points. (V. Retali.)

×**1285.** Deux cônes droits de rayons donnés, r_1, et r_2 ont même surface totale et même volume. On propose de calculer cette surface, le volume et le rayon de la sphère inscrite.

Même question si les hauteurs h_1, h_2 sont données. (Emmerich.)

×**1286.** Résoudre les n équations :

$$x_1x_2 + ax_1 + bx_1 + c = 0, \quad x_2x_3 + ax_2 + bx_3 + c = 0;$$

. . . . . .

$$x_{n-1}x_n + ax_{n-1} + bx_n + c = 0, \quad x_nx_1 + ax_n + bx_1 + c = 0.$$

(Emmerich.)

1287. On donne dans un même plan une parabole π et une droite μ. Une sécante quelconque menée par un point fixe P de π rencontre la conique en A et la droite en B. On mène la tangente t en A, et par B on tire une droite d parallèle à t. Trouver l'enveloppe de la droite d.

(H. Lorent.)

×**1288.** Dans la pyramide DABC, l'arête CD est perpendiculaire à la face ABD ; si l'on désigne par α, β, γ les angles DAC, DBC, ACB et qu'on pose $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, le volume de la pyramide a pour expression

$$\frac{1}{3}\,CD \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos p \cos(p-\gamma) \sin(p-\alpha) \sin(p-\beta)}.$$

(A. C.)

Digitized by Google

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1900.

Solution par M. PLOUMEN, professeur à Chimay.

Première question de Géométrie analytique.

Un des sommets A *d'un parallélogramme* ABCD *circonscrit à une hyperbole se meut sur la circonférence ayant l'axe transverse pour diamètre et dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe imaginaire. Rechercher les lieux décrits par les trois autres sommets.*

1. Il est évident que le centre de la courbe est le centre de tout parallélogramme circonscrit ABCD, puisque les points de contact de deux côtés opposés se trouvent sur le même diamètre. Donc, pendant que le sommet A décrit, dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe imaginaire, l'arc de cercle ayant l'axe transverse comme diamètre, le sommet opposé C décrit, dans l'angle opposé, un arc du même cercle.

Cherchons maintenant le lieu décrit par les sommets B et D; chacun de ces sommets se trouve évidemment toujours dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe transverse. Soient (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points de contact des tangentes issues de B; $(-x', -y')$, $(-x'', -y'')$ seront les coordonnées des points de contact des deux autres tangentes. La condition que le point A se trouve à une distance a du centre s'exprime par l'égalité

$$a^2 = \frac{a^4(y' + y'')^2 + b^4(x' + x'')^2}{(y'x'' - y''x')^2}. \qquad (1)$$

Les tangentes issues de B ont pour équations

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2, \quad (2) \qquad a^2yy'' - b^2xx'' = -a^2b^2, \quad (3)$$

avec les conditions

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2, \quad (4) \qquad a^2y''^2 - b^2x''^2 = -a^2b^2. \quad (5)$$

Il nous suffit d'éliminer x', y', x'', y'' entre ces cinq relations pour avoir l'équation du lieu du point B. Pour cela, tirons d'abord y', y'' de (2) et (3) et substituons dans (1); nous obtenons

$$a^2(x' - x'')^2 = [x(x' + x'') - 2a^2]^2 + y^2(x' + x'')^2. \qquad (6)$$

Si ensuite nous éliminons y' entre (2) et (4), ou y'' entre (3) et (5), nous trouverons une équation du 2e degré dont nous appellerons les racines

Digitized by Google

x', x''. Cette équation nous donne

$$x' + x'' = \frac{2a^2b^2x}{b^2x^2 - a^2y^2}, \quad (x' - x'')^2 = \frac{4a^4y^2(a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2)}{(b^2x^2 - a^2y^2)^2}.$$

Substituant enfin dans (6) il nous vient pour équation du lieu de B

$$x^2 = \frac{a^4}{c^2}. \qquad (7)$$

Il est facile de voir que si, dans les calculs précédents, on change x', y', x'', y'' en $-x', -y', -x'', -y''$ on obtient pour le lieu du point D la même équation (7).

Donc les lieux des points B et D ont pour équation $x = \pm\frac{a^2}{c}$; c'est-à-dire que ces points décrivent les portions des directrices comprises dans les argles des asymptotes comprenant l'axe transverse.

2. *Autre manière de faire les calculs.* On peut représenter par $(a\cos\varphi, b\sqrt{-1}\sin\varphi)$, $(a\cos\varphi', b\sqrt{-1}\sin\varphi')$ les coordonnées des points de contact des tangentes issues de B.

La condition que le point A se trouve à une distance a du centre s'exprime par

$$a^2 = \frac{a^2(\sin\varphi + \sin\varphi')^2 - b^2(\cos\varphi + \cos\varphi')^2}{\sin^2(\varphi - \varphi')}$$

ou

$$a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') = a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') - b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi'). \qquad (1)$$

Les tangentes issues de B ont pour équations

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b\sqrt{-1}} = 1, \quad \frac{x\cos\varphi'}{a} + \frac{y\sin\varphi'}{b\sqrt{-1}} = 1. \qquad (2), (3)$$

Pour avoir l'équation du lieu de B, il nous suffit d'éliminer φ et φ' entre ces trois dernières relations.

De (2) et (3), nous tirons

$$x = \frac{a\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}, \quad y = \frac{b\sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}.$$

D'où

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}, \quad \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \frac{x\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{a};$$

on peut alors éliminer φ et φ' de l'équation (1) et l'on obtient ainsi comme plus haut, $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

Digitized by Google

Seconde question de Géométrie analytique.

Rechercher les positions d'équilibre d'une masse m d'électricité positive occupant un point d'une ellipse, mais assujettie à se mouvoir sous l'action de deux masses m' et m'' d'électricité de même nom, sans action réciproque et placées respectivement aux foyers F *et* F' *de la courbe.*

Soit M (x', y') un point de l'ellipse qui répond à la question et supposons que les masses m' et m'' soient d'électricité positive. Les masses m', m'' exercent sur m des répulsions égales à $\frac{mm'}{\overline{MF}^2}$ et $\frac{mm''}{\overline{MF'}^2}$. Décomposons chacune de ces forces suivant la tangente et la normale en M; puisque le point M est en équilibre, les deux composantes tangentiellles seront égales. Or les directions des forces $\frac{mm'}{\overline{MF}^2}, \frac{mm''}{\overline{MF'}^2}$ font des angles égaux avec la tangente; l'égalité des composantes tangentielles exige donc que

$$\frac{mm'}{\overline{MF}^2} = \frac{mm''}{\overline{MF'}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{m'}{(a^2 - cx')^2} = \frac{m''}{(a^2 + cx')^2},$$

ou $$\frac{\sqrt{m'}}{a^2 - cx'} = \frac{\sqrt{m''}}{a^2 + cx'}, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{a^2}{c}\frac{\sqrt{m''} - \sqrt{m'}}{\sqrt{m''} + \sqrt{m'}}.$$

Donc, si $m'' > m'$, il existe à la droite du petit axe deux points, symétriques par rapport au grand axe, qui répondent au problème; si $m'' < m'$, ces deux points symétriques existent à la gauche du petit axe; enfin si $m'' = m'$, ce sont les extrémités du petit axe qui satisfont à la question. Toutefois, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait, en valeur absolue,

$$\frac{\sqrt{m''} - \sqrt{m'}}{\sqrt{m''} + \sqrt{m'}} \leq \frac{c}{a} \text{ ou } \frac{m''}{m'} \leq \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}.$$

En particulier, si $\frac{m''}{m'} = \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}$, ce sont les sommets du grand axe qui sont les positions demandées.

Digitized by Google

Question d'Algèbre(*).

Démontrer la relation

$$m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)+(m-1)m(m+1)\cdots(m+n-2)+\cdots$$
$$\cdots+(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)=$$
$$=\frac{m(m+1)\cdots(m+n)-(m-k)\cdots(m+n-k)}{n+1}.$$

Si nous divisons les deux membres de cette égalité par $n!$, il vient

$$C'_{m,n}+C'_{m-1,n}+C'_{m-2,n}+\cdots+C'_{m-k+1,n}=C'_{m,n+1}-C'_{m-k,n+1}$$

$C'_{m,n}$ désignant le nombre de combinaisons avec répétition de m éléments, n à n.

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$C_{m+n-1,n}+C_{m+n-2,n}+\cdots C_{m+n-k,n}=C_{m+n,n+1}-C_{m+n-k,n+1}$$

$C_{m,n}$ désignant un nombre de combinaisons simples.

On a

$$C_{m+n,n+1}=C_{m+n-1,n+1}+C_{m+n-1,n}$$
$$C_{m+n-1,n+1}=C_{m+n-2,n+1}+C_{m+n-2,n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{m+n-k+1,n+1}=C_{m+n-k,n+1}+C_{m+n-k,n}$$

Ajoutant ces égalités, simplifiant et transposant, on arrive à la relation proposée.

NOTES SUR LA COMPOSITION DES FORCES ;

par M. C. Wasteels, répétiteur à l'Université de Gand.

I. *Centre de gravité d'un quadrilatère.* Le centre de gravité d'un quadrilatère est le centre de cinq forces parallèles et égales, appliquées respectivement aux quatre sommets et à l'intersection des diagonales, les quatre premières étant dirigées dans un même sens et la dernière, en sens contraire.

Démonstration. Soient le quadrilatère ABCD dont les diagonales se coupent en O, et 3P, $3P_a$, $3P_o$, les poids du quadrilatère et des triangles DAB et BCD. Le poids $3P_a$ peut être remplacé par trois poids égaux

---

(*) Enoncé rectifié.

Digitized by Google

à P_a appliqués respectivement en A, B et D; de même, le poids $3P_c$ se décompose en 3 poids P_c appliqués en C, B et D.

Appliquons encore au sommet A une force P_c et une force $P'_a = -P_c$, et en C, les forces P_a et $P'_c = -P_a$.

Les deux forces P'_a et P'_c se composent en une force unique égale à $-(P_c + P_a) = -P$ et appliquée en un point de AC qui divise cette droite dans le rapport $P_a : P_c$ ou AO : OC, c'est-à-dire au point O.

Les sommets A, B, C, D et le point O sont donc respectivement sollicités par les forces

$$P_a + P_c,\ P_a + P_c,\ P_c + P_a,\ P_a + P_c,\ -P,$$

ou

$$P,\quad P,\quad P,\quad P,\quad -P;$$

d'où l'on conclut sans peine le théorème énoncé.

II. ***Sur deux systèmes de forces équivalents.*** Soit un pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ dans lequel les diagonales se coupent en S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, S_i désignant celui de ces cinq points qui n'est situé sur aucune diagonale issue de A_i, de sorte que S_i est encore le point de rencontre des diagonales du quadrilatère Q_i obtenu en supprimant le sommet A_i.

Cela étant, considérons un système de cinq forces parallèles et de même sens P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5, appliquées respectivement en S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 et proportionnelles aux quadrilatères correspondants; on obtiendra un système équivalent en transportant chaque force P_i au sommet A_i.

Démonstration. Désignons par T_i et t_i des forces proportionnelles aux triangles construits respectivement sur les deux côtés et les deux diagonales aboutissant en A_i, le coefficient de proportionnalité étant le même que pour les forces déjà considérées.

Décomposons la force P_1 appliquée en S_1 en deux forces parallèles appliquées en A_2 et A_5; on voit sans peine que les deux composantes ne sont autre chose que les forces désignées par t_2 et T_5. En opérant d'une manière analogue pour chacune des autres forces P_i, on trouve que chaque sommet A_i est sollicité par les forces t_{i-1} et T_{i-2} (les indices 0 et -1 étant supposés remplacés par 5 et 4); or, $t_{i-1} + T_{i-2} = P'_i$; ce qui démontre le théorème.

Remarque. Ce théorème de mécanique peut se traduire par la formule

$$\Sigma \alpha_i Q_i = 0,$$

α_i désignant la projection (algébrique) de A_iS_i sur un axe quelconque.

Digitized by Google

INÉGALITÉS LOGARITHMIQUES.

1. ***Aire de la parabole et de l'hyperbole; inégalités à démontrer.*** On sait, depuis Archimède, que l'aire comprise entre un arc de parabole à partir de son sommet, la tangente en ce sommet et la perpendiculaire abaissée sur cette tangente de l'extrémité de l'arc, est le tiers du rectangle construit sur cette perpendiculaire et sur la partie de la tangente comprise entre son pied et le sommet de la courbe.

On sait aussi, relativement à l'hyperbole équilatère $xy = 1$, que l'aire comprise entre deux ordonnées correspondant aux abcisses $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$, l'axe des x et la courbe est égale à $l\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, l désignant un logarithme népérien(*).

En nous appuyant sur ces deux théorèmes, nous allons prouver les inégalités suivantes :

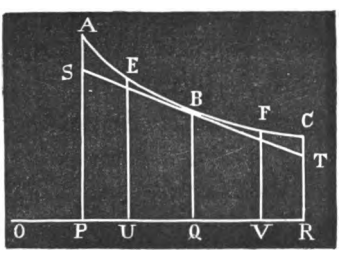
$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < l\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12n(n+\frac{1}{2})(n+1)},$$

n étant une quantité positive quelconque.

2. ***Première inégalité.*** Considérons trois points A, B, C sur l'hyperbole équilatère $xy = 1$, et soient

$$OP = n, \quad OQ = n+\tfrac{1}{2}, \quad OR = n+1,$$

les abscisses de ces trois points. Appelons S et T les points où la tangente à la courbe en B coupe AP et CR. L'aire du trapèze PSTR est égale à PR × BQ, c'est-à-dire à $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$; elle est inférieure à l'aire hyperbolique H = PABCR, laquelle a pour mesure $l\left(\frac{n+1}{n}\right) = l\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Donc



$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

(*) Sur la détermination de l'aire des paraboles et hyperboles quelconques, voir notre exposé de la méthode de Fermat, *Mathesis* (1), V, p. 44; sur l'application de cette méthode à l'hyperbole équilatère, notre *Résumé d'Analyse*, n° 131, p. 82.

Digitized by Google

3. *Seconde inégalité.* Supposons la longueur PR divisée en $2k$ parties égales à δ. On aura, comme on sait,

$$H = \lim \sum_{x=n}^{x=n+1} \frac{1}{x} \cdot \delta$$

où l'on suppose δ indéfiniment décroissant.

Posons $QU = QV = X$ et considérons les deux ordonnées de l'hyperbole,

$$UE = \frac{1}{n+\frac{1}{2}-X}, \quad VF = \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X},$$

correspondant aux abscisses

$$OU = OQ - QU = n+\tfrac{1}{2}-X, \quad OV = OQ + QV = n+\tfrac{1}{2}+X.$$

On pourra évidemment écrire H sous la forme

$$H = \lim \sum_{X=0}^{X=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}-X} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X} \right) \delta,$$

par un simple changement de notation. Or

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}-X} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X} = \frac{2}{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}-X} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right]$$

$$- \left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X} \right] = \frac{2}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\,[(n+\frac{1}{2})^2 - X^2]}.$$

On a donc

$$H = \lim \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{n+\frac{1}{2}} \cdot \delta + \lim \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\,[(n+\frac{1}{2})^2 - X^2]} \cdot \delta.$$

La première partie de la valeur de H est égale à

$$\frac{2}{n+\frac{1}{2}} \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \delta = \frac{2}{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

On a ensuite, pour les valeurs de X, de 0 à $\frac{1}{2}$,

$$\frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\,[(n+\frac{1}{2})^2 - X^2]} < \frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\,[(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2]} \text{ ou } \frac{2X^2}{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}.$$

La seconde partie de la valeur de H est donc inférieure à

$$\lim \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2X^2}{n(n+\frac{1}{2})(n+1)} \cdot \delta,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire à l'aire d'une parabole ayant pour équation

$$Y = \frac{2X^2}{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}.$$

Cette aire étant limitée comme il est dit au n° 1, a pour mesure le tiers du produit de l'ordonnée extrême par l'abscisse correspondante ou

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2\,(\frac{1}{2})^2}{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}.$$

On a donc enfin

$$\text{H ou } l\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)},$$

ce qui est la seconde inégalité annoncée (*).

4. Remarque. Au moyen des deux inégalités démontrées ici, on peut construire une table de logarithmes assez exacte en faisant successivement $n = 75, 95, 360, 512, 2400$, etc. (Voir notre *Résumé d'Analyse*, n° 261, pp. 153-154). (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Combinaisons*. De combien de manières peut-on prendre, parmi m objets en ligne droite, n groupes de p objets adjacents chacun?

Il faut évidemment que m soit supérieur à np et nous admettrons en outre que deux ou plusieurs groupes pourront parfois se suivre sans interruption.

Cela étant, désignons les objets par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$. On peut former tous les arrangements cherchés, en écrivant d'abord m groupes g de n lettres a chacun, ces lettres étant momentanément sans indices,

$$\underline{a, a, a, \ldots}_{g}, \quad \underline{a, a, a, \ldots}_{g}, \ldots,$$

puis en plaçant, de toutes les manières possibles, les $m - np$ lettres a restantes (également sans indices) dans les intervalles des groupes, ou à gauche du premier groupe, ou à droite du dernier, enfin en mettant, dans chaque arrangement, les indices de gauche à droite dans l'ordre naturel.

(*) Le second membre de l'inégalité est l'aire d'une parabole passant par les trois points A, B, C et ayant son axe parallèle à AB.

Digitized by Google

Mais tout cela équivaut à faire les permutations à répétition de n lettres g et de $m - np$ lettres a, à remplacer les lettres g par des groupes; puis à mettre des indices.

Donc le nombre cherché est

$$\frac{P_{m-np+n}}{P_{m-np} \cdot P_n}.$$

Le lecteur peut s'exercer à résoudre la question suivante : de combien de manières peut-on prendre n groupes de p objets adjacents parmi m objets placés en cercle ? (M. STUYVAERT.)

15. *Notes sur la question* 1251 (Voir *Mathesis*, (2) X, p. 32, 168). Soit MBC un triangle isoscèle de base BC ; une parallèle à la base coupe les côtés égaux MB en A et MC en D.

La hauteur abaissée de M sur la base passe par le milieu A′ de cette dernière et par le point de rencontre N des diagonales AC et BD du trapèze isoscèle ABCD.

Le trapèze isoscèle étant inscriptible dans un cercle, on retrouve comme corollaire de la question 1251, un théorème que j'avais déjà démontré dans ma note de la livraison de janvier, sur trois hyperboles associées à un triangle (pp. 11 — 13) :

La médiatrice du côté BC d'un triangle rencontre les deux autres côtés AB et AC en M et N. L'hyperbole qui est tangente en ces deux points aux côtés considérés, qui admet donc comme pôle du sommet A, la médiatrice de BC et qui a en outre ce côté BC comme une des asymptotes, touche la droite de Lemoine du triangle ABC. (DROZ-FARNY).

16. *Sur l'aire du quadrilatère.* Dans le numéro de février 1900, de *Mathesis*, p. 42, M. J. NEUBERG a démontré que si $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ sont les sommets d'un quadrilatère convexe, l'on a, en grandeur et en signe, pour l'aire Q du quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$,

$$Q = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}.$$

Voici une application intéressante de cette formule. Supposons les quatre points donnés à l'intersection d'une parabole $y^2 = 2px$ et d'un cercle quelconque. On aura

$$Q = \frac{1}{4p}\begin{vmatrix} y_3^2 - y_1^2 & y_3 - y_1 \\ y_4^2 - y_2^2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix} = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{4p}\begin{vmatrix} y_3 + y_1 & 1 \\ y_4 + y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Les quatre points seront sur une circonférence si $y_4+y_2=-(y_5+y_1)$. Donc

$$Q=\frac{(y_5-y_1)(y_4-y_2)}{4p}\begin{vmatrix} y_5+y_1 & 1 \\ -(y_5+y_1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(y_3^2-y_1^2)(y_4-y_2)}{2p}=(x_1-x_3)(y_1-y_4)$$

(Droz-Farny).

SUR LES TRIANGLES TRIHOMOLOGIQUES;

par M. Ripert.

M. Third a démontré (*Mathesis*, 1900, p. 153) une proposition très intéressante qui adjoint à tout couple (A, B) de triangles trihomologiques, dont les centres sont S_1, S_2, S_3, un triple de coniques $\Sigma_1(A_1A_2A_3S_2S_3)$, Σ_2, Σ_3, remarquables. On peut leur adjoindre de même un triple $\Sigma_1'(B_1B_2B_3S_2S_3)$. Σ_2', Σ_3'. Chaque conique Σ_i coupe le cercle $(A_1A_2A_3)$ en un quatrième point $C_i(i=1, 2, 3)$, et chaque conique Σ_i' coupe le cercle $(B_1B_2B_3)$ en un quatrième point D_i. On peut donc adjoindre à tout couple (A, B) de triangles trihomologiques un sextuple de coniques (Σ_i, Σ_i') (*) et un second couple de triangles (C,D).

Cela posé, si A et B sont inscrits à un même cercle (ou conique) O, les triangles C, D sont trihomologiques à A et B et trihomologiques entre eux. L'ensemble forme un *quadruple* inscrit (A, B, C, D), susceptible d'être transformé en un *groupe* d'un nombre indéfini de triangles inscrits, trihomologiques deux à deux.

J'ai démontré ces propriétés dans un Mémoire ***sur des groupes de triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une même conique ou à une famille de coniques***, que j'ai présenté cette année à l'AFAS.

Voici un aperçu de la démonstration.

Le triangle $A_1A_2A_3$, inscrit dans la conique $O\left(\Sigma\frac{\alpha_2}{x_2}=0\right)$ $(i, k, l=1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2)$ étant de référence, on reconnaît aisement qu'un

---

(*) Sans compter les coniques corrélatives σ_i, σ_i', indiquées par M. Third et qui donneront les propriétés corrélatives pour les triangles circonscrits.

Digitized by Google

triangle $B_1B_2B_3$ trihomologique à A est défini, avec la condition $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, par

$$B_1\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \frac{\alpha_2}{\lambda_2}, \frac{\alpha_3}{\lambda_3}\right), \quad B_2\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_3}, \frac{\alpha_2}{\lambda_1}, \frac{\alpha_3}{\lambda_2}\right), \quad B_3\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_2}, \frac{\alpha_2}{\lambda_3}, \frac{\alpha_3}{\lambda_1}\right),$$

les centres S_i correspondants étant aux points

$$S_1(\alpha_1\lambda_1, \alpha_2\lambda_3, \alpha_3\lambda_2), \quad S_2(\alpha_1\lambda_3, \alpha_2\lambda_2, \alpha_3\lambda_1), \quad S_3(\alpha_1\lambda_2, \alpha_2\lambda_1, \alpha_3\lambda_3).$$

Les trois coniques Σ_i ont pour équation

$$\frac{\alpha_i}{\lambda_i x_i} + \frac{\alpha_k}{\lambda_i x_k} + \frac{\alpha_l}{\lambda_k x_i} = 0,$$

et les points C_i ont pour coordonnées, en posant $\lambda_i(\lambda_k - \lambda_l) = \mu_i$

$$C_i\left(\frac{\alpha_i}{\mu_i}, \frac{\alpha_k}{\mu_l}, \frac{\alpha_l}{\mu_k}\right).$$

On vérifie alors immédiatement que les triangles A et C sont trihomologiques, les centres C'_i étant

$$(\alpha_1\mu_1, \alpha_2\mu_2, \alpha_3\mu_3), \quad (\alpha_1\mu_3, \cdots), \quad (\alpha_3\mu_2, \cdots).$$

On reconnaît ensuite que les triples (B_iC_i), (B_iC_k), (B_iC_l) concourent en des points C''_i :

$$C''_1[3\alpha_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad \alpha_2(\lambda_3\mu_2 - \lambda_1\mu_1), \quad \alpha_3(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_3)], \text{ etc.}$$

Donc (A, B, C) est un triple de triangles inscrits, deux à deux trihomologiques. Il en est évidemment de même du triple (A, B, D). Un calcul laborieux mais sans difficulté montre que les triangles C et D sont trihomologiques entre eux. — D'ailleurs, la propriété suivante est facile à démontrer : si deux triangles *inscrits à une même conique* sont trihomologiques à un troisième (*également inscrit*)(*), ils sont trihomologiques entre eux.

(*) Condition qui n'est nullement nécessaire; mais la démonstration est plus compliquée quand on la supprime.

Digitized by Google

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE.

Sophus Lie (1842-1899). (*)

SOPHUS LIE, né le 17 novembre 1842, à Nordfjordeid, près de Florö, en Norwège, est mort à Christiania, le 18 février 1899.

Dans sa jeunesse, LIE a longtemps hésité entre la Philologie et les Mathématiques; mais vers 1865, les travaux de PLÜCKER sur la Géométrie réglée lui donnèrent, pour la première fois, pleine conscience de ses aptitudes et l'orientèrent vers les recherches auxquelles il consacra sa vie : il publia en 1869 son premier travail et dès 1870, il était en possession des idées directrices de toute sa carrière. Vers cette époque il vint à Paris, où il étudia, avec KLEIN, la *Théorie des substitutions* de JORDAN, persuadé dès lors du rôle essentiel que la théorie des groupes est appelée à jouer dans toutes les branches des mathématiques.

Une courte note de LIE *Sur une transformation géométrique*, présentée par lui à l'Académie des sciences de Paris, en octobre 1870, développée en 1872, dans un mémoire plein d'idées neuves, qui fut publié dans les *Mathematische Annalen*, contient une découverte extrêmement originale. Il y expose une transformation singulière qui fait correspondre une sphère à une ligne droite et permet de déduire de toute proposition relative à un ensemble de droites, un théorème relatif à un ensemble de sphères. Chaque propriété des lignes asymptotiques d'une surface se transforme en une propriété relative aux lignes de courbure d'une autre.

A partir de 1872, LIE ne cesse de faire paraître une série de Mémoires sur les parties les plus difficiles et les plus hautes du calcul intégral. Il commence par une étude approfondie des travaux de JACOBI sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, les perfectionne sur un point important (**) et est conduit peu à peu à construire la théorie des groupes continus de transformations qui constitue son œuvre la plus importante; dans ces recherches, il emploie sans cesse deux éléments dont le second lui appartient en propre : les transformations de contact et les transformations infinitésimales.

(*) D'après DARBOUX, *Notice sur* SOPHUS LIE. C. R., t. CXXVIII, pp. 525-529. — Une liste des œuvres de LIE a paru dans le *Bollettino* de G. LORIA, 1899, pp. 71-75, avec une notice sur LIE, par C. SEGRE. Une notice suivie d'une liste plus complète due à M. ENGEL, a été publiée dans la *Bibliotheca mathematica* d'ENESTRÖM, 1900, (3), I, pp. 166-204.

(**) Nous avons le premier fait connaître ces remarquables recherches de LIE dans notre *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (1873-1875).

Digitized by Google

On doit aussi à LIE un grand nombre de recherches géométriques; il détermine toutes les surfaces minima algébriques d'une classe et d'un ordre donné, ou inscrites dans une développable algébrique donnée, quand l'on en connaît une; on lui doit des travaux intéressants sur les surfaces à courbure constante, sur les lignes et les cercles géodésiques, sur les surfaces de translation, etc. Il a étudié à fond des questions d'*analyse* en connexion intime avec les principes de la géométrie euclidienne ou non-euclidienne.

De 1877 à 1886, LIE a été professeur à l'Université de Christiania; de 1886 à 1898 à celle de Leipzig. Rentré à Christiania pour y occuper une chaire spécialement créée pour lui, il y est mort d'anémie cérébrale à l'âge de 56 ans.

Le grand ouvrage (*Theorie der Transformationsgruppen*, 1888, 1893; *Geometrie der Berührungstransformationen*, 1896, 1er Band) où il avait entrepris, avec ses disciples, l'exposition de l'ensemble de ses découvertes, reste inachevé. Peut-être n'est-il pas écrit avec la clarté et la concision nécessaires pour que les idées du maître soient rendues aussi accessibles que possible. Il faut bien avouer que les grands mémoires de LIE aussi sont parfois obscurs et prolixes en même temps. L'œuvre entière de LIE devrait être *transposée* (nous ne disons pas *traduite*) en français. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1139(*).

(Voir *Mathesis* (2), t. VII, p. 237).

Soient A, B, ... *les mineurs du déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Démontrer que

$$\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ A'^2 & B'^2 & C'^2 \\ A''^2 & B''^2 & C''^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 \\ a''^2 & b''^2 & c''^2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ b'c' & c'a' & a'b' \\ b''c'' & c''a'' & a''b'' \end{vmatrix}.$$

(A. C.)

Solution par M. EMMERICH. J'écris l'égalité proposée sous la forme

$$\frac{\Delta}{D^2} = \Delta_1 - 2\Delta_2.$$

(*) Énoncé rectifié.

Digitized by Google

Alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \Sigma A^2 a D\,(B'C'' + B''C')\\ &= D\Sigma A^2 a\,(aD + 2B''C')\\ &= D^2\Sigma A^2 a^2 + 2D\Sigma A^2 a B''C';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma A^2 a B''C' &= \Sigma\,(D - A'a' - A''a'')\,AB''C'\\ &= D\Sigma AB''C' - \Sigma AA'\,(B''C'a' + BC''a)\\ &= D\Sigma AB''C' - \Sigma AA'\,(B''C'a' + B''Ca - aa'D)\\ &= D\,(\Sigma AB''C' + \Sigma AA'aa') + \Sigma AA'B''C''a'';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma AA'B''C''a'' &= A\,(A'B''C''a'' + A''B'C'a') + A'A''BCa\\ &= A\,(A''B'C''a'' + cDC''a'' + A''B'C'a') + A'A''BCa\\ &= DAC''ca'' - AA''B'Ca + A'A''BCa\\ &= D\,(AC''ca'' - A''Cac'')\\ &= D\,[Aca''\,(ab' - a'b) - A''ac''\,(a'b'' - a''b')]\\ &= D\,[-Aa'a''bc + (Ac + A''c')\,aa''b' - A''aa'b''c'']\\ &= -D\Sigma Aa'a''bc.\end{aligned}$$

En substituant, nous avons

$$\Delta = D^2\Sigma A^2a^2 + 2D^2\Sigma\,(AB''C' + AA'aa' - Aa'a''bc),$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{D^2} &= (\Sigma Aa^2) + 2\Sigma AB''C' - 2\Sigma Aa'a''bc\\ &= \Sigma A\,(B'C'' + B''C' - 2a'a''bc).\end{aligned}$$

Posons $b'c'' + b''c' = \alpha$, $b''c + bc'' = \alpha'$, $bc' + b'c = \alpha''$; il vient

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{D^2} &= \Sigma Aa\,(a\alpha - a'\alpha' - a''\alpha'')\\ &= \Sigma Aa^2\alpha - \Sigma a'a''\,(A'\alpha'' + A''\alpha').\end{aligned}$$

Or $\Sigma a^2 A\alpha = \Sigma a^2\,(b'^2c''^2 - b''^2c'^2)\,\Delta_1$; d'autre part on a

$$A'\alpha'' + A''\alpha' + \begin{vmatrix} b''c - bc'' & b''c + bc'' \\ b'c - bc' & b'c + bc' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b''c - bc'' & b''c \\ b'c - bc' & b'c \end{vmatrix} = -2bcA.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\Sigma a'a''\,(A'\alpha' + A''\alpha') &= -2\Sigma a'a''bcA = -2\Sigma a'a''bc\,(b'c'' - b''c')\\ &= 2\Sigma bc\,(c'a'.\,a''b'' - a'b'.\,c''a'') = 2\Delta_2.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Digitized by Google

Question 1178.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII p. 152).

On donne dans le même plan trois systèmes égaux F_1, F_2, F_3 ; A_3 *est le point double de* F_1, F_2 ; A_2 *celui de* F_3, F_1 ; A_1 *celui de* F_2, F_3 ; D_1, D_2, D_3 *sont respectivement les points correspondant à* A_1, A_2, A_3 *dans les systèmes* F_1, F_2, F_3. *Si, pour chaque triple* P_1, P_2, P_3 *de points homologues, on détermine le centre* P *du cercle circonscrit, on obtient un quatrième système que nous appellerons* Φ *: cela posé, démontrer que chacun des systèmes* F_1, F_2, F_3 *est lié à* Φ *par une correspondance quadratique rationnelle et étudier ces trois transformations.* (V. Retali.)

Solution par M. Droz-Farny. Soit π un point quelconque du plan du triangle $A_1A_2A_3$.

On démontre, par des considérations de géométrie élémentaire, que ses symétriques par rapport aux trois côtés du triangle sont les points P_1, P_2 et P_3 et que le centre du cercle $P_1P_2P_3$ est le conjugué isogonal de π par rapport au même triangle.

Or, c'est un fait bien connu, que la transformation isogonale dans le triangle $A_1A_2A_3$ revient à une transformation de Steiner par rapport au faisceau des hyperboles équilatères passant par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits à $A_1A_2A_3$.

La correspondance de Φ à F_1 revient donc au produit d'une correspondance de Steiner par une symétrie.

Question 1183.

(Voir *Mathesis* (2) VIII, pp. 216 et 264).

Par un point P *du plan d'un triangle donné* ABC, *on mène des parallèles aux médianes; soient* A', B', C' *les points de rencontre de ces parallèles avec les côtés correspondants de* ABC. 1° *Trouver le lieu d'un point* P *tel que*

$$A'B'C' = \frac{3}{16}ABC. \qquad (1)$$

Digitized by Google

2° *Quel est, dans ce cas, le lieu du centre de gravité du triangle* A'B'C'? 3° *Trouver l'enveloppe de chaque côté du triangle* A'B'C'.

(J. Déprez).

Une projection orthogonale ramène la question au cas où le triangle ABC est équilatéral; les droites AA', BB', CC' deviennent alors perpendiculaires à BC, CA, AB. Supposons donc le triangle ABC équilatéral.

1° Le triangle podaire de P doit avoir une surface constante; donc, d'après un théorème connu, le lieu de P est une circonférence concentrique avec la circonférence ABC. C'est la circonférence inscrite à ABC; car les milieux des côtés du triangle ABC ont des triangles podaires dont la surface $= \frac{3}{16}$ ABC.

2° Soient α, β, γ les coordonnées normales de P, et α', β', γ' celles du centre de gravité G' du triangle A'B'C'. Les coordonnées des points A', B', C' sont

$$0,\ B'P + A'P\cos 60^\circ = \beta + \tfrac{1}{2}\alpha,\ \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha;\ \alpha + \tfrac{1}{2}\beta,\ 0,\ \alpha + \tfrac{1}{2}\gamma;\ \ldots,$$

on en conclut

$$\alpha' = \tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{1}{6}(\beta + \gamma),\quad \beta' = \tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{1}{6}(\gamma + \alpha),\ \ldots;$$

inversement

$$\alpha = \frac{5\alpha' - \beta' - \gamma'}{3},\quad \beta = \frac{5\beta' - \gamma' - \alpha'}{3},\quad \gamma = \frac{5\gamma' - \alpha' - \beta'}{3}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation $\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\beta\gamma = 0$ du cercle inscrit au triangle ABC; nous aurons, pour l'équation du lieu de G',

$$5\Sigma\alpha^2 - 6\Sigma\beta\gamma = 0,\quad \text{ou}\quad 5\Sigma^2\alpha - 16\Sigma\beta\gamma = 0.$$

Ce lieu est donc la circonférence qui passe par les milieux des médianes.

3° Prenons pour axes coordonnés les droites CA, CB. L'équation du cercle inscrit au triangle ABC sera

$$x^2 + xy + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0,$$

ou

$$(x + y - a)^2 - xy = 0, \qquad (1)$$

$2a$ désignant la longueur CB. Si x et y représentent les coordonnées du point P de ce cercle, on trouve facilement $CB' = x + \frac{1}{2}y$, $CA' = y + \frac{1}{2}x$,

Digitized by Google

de sorte que l'équation de la droite A'B' est

$$\frac{2X}{2x+y}+\frac{2Y}{2y+x}=1.$$

Les coordonnées tangentielles de A'B' étant

$$u=-\frac{2}{2x+y},\quad v=-\frac{2}{2y+x}, \tag{2}$$

on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite A'B' en éliminant x et y entre les égalités (1) et (2). Cette enveloppe est de la 4e classe.

On peut remplacer l'équation (1) par le système

$$\frac{x+y-a}{\lambda\mu}=\frac{x}{\lambda^2}=\frac{y}{\mu^2}, \tag{3}$$

le rapport $\lambda:\mu$ tenant lieu de paramètre variable. Du rapport (3), on déduit facilement

$$\frac{a}{\lambda^2-\lambda\mu+\mu^2}=\frac{2x+y}{2\lambda^2+\mu^2}=\frac{2y+x}{\lambda^2+2\mu^2},$$

de sorte que les coordonnées homogènes de la droite A'B' sont

$$u:v:w=\frac{1}{2\lambda^2+\mu^2}:\frac{1}{\lambda^2+2\mu^2}:\frac{-a}{2(\lambda^2-\lambda\mu+\mu^2)}.$$

En écrivant l'équation de cette droite en coordonnées cartésiennes (avec le paramètre λ) et appliquant ensuite la théorie des enveloppes, on trouve une courbe du 6e ordre. (J. N.)

M. Emmerich a résolu la même question en supposant le triangle ABC quelconque.

Question 1197.

(*Mathesis*, (2) VIII, p. 280).

Étant données deux circonférences I *et* O, *on mène au point* M *de la première une tangente qui rencontre la seconde aux points* A *et* B, *et l'on considère le triangle* M'AB *dont le sommet* M' *est diamétralement opposé à* M *sur la circonférence* I. *Trouver le lieu du centre* N *du cercle circonscrit à ce triangle.* (Soons.)

Digitized by Google

Solution par M. Emmerich. Prenons pour axes la ligne des centres OI et la perpendiculaire en O; soient

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (1)$$
$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

les équations des deux cercles.

Si l'on désigne par $\rho = O\omega$, $u = angle\ IO\omega$ les coordonnées polaires de M, les coordonnées rectangulaires des points N, M, M′ sont

$$N\begin{cases}\rho\cos\omega,\\ \rho\sin\omega;\end{cases} \quad M\begin{cases}a + r\cos\omega,\\ r\sin\omega;\end{cases} \quad M'\begin{cases}a - r\cos\omega,\\ -r\sin\omega.\end{cases}$$

La tangente au point M a pour équation

$$(x - a)\cos\omega + y\sin\omega = r. \qquad (2)$$

Appelons x, y les coordonnées du point A; elles vérifient les équations (1) et (2). En exprimant que NA = NM′ on obtient

$$(\rho\cos\omega - x)^2 + (\rho\sin\omega - y)^2 = [(\rho + r)\cos\omega - a]^2 + (\rho + r)^2\sin^2\omega.$$

En développant et en tenant compte des égalités (1) et (2) on trouve

$$\rho = \tfrac{1}{2}a\cos\omega + \frac{R^2 - r^2 - a^2}{2r}.$$

Telle est l'équation du lieu en coordonnées polaires. On voit que ce lieu est généralement un limaçon de Pascal, ayant pour pôle le point O et pour cercle directeur le cercle décrit sur la distance OI comme diamètre. Il se réduit au cercle directeur lorsque $R^2 = r^2 + a^2$, ou quand le cercle O passe par les extrémités d'un diamètre du cercle I. On obtient une cardioïde lorsque

$$\frac{R^2 - r^2 - a^2}{2r} = \pm a,$$

ou

$$R^2 = (r \pm a)^2;$$

les cercles proposés sont alors tangents l'un à l'autre.

Ont résolu la même question MM. Déprez, Ripert, Van Dorsten, Barisien et Sintsof. M. Barisien remarque que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points du triangle M′AB décrivent également des limaçons de Pascal.

Question 1239.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 240).

Etant donnée une conique de foyers F ***et*** F′, ***on considère une hyperbole équilatère ayant un de ses foyers en*** F ***et dont la directrice correspondante***

Digitized by Google

passe par F'. *Trouver l'enveloppe de cette hyperbole, et les lieux du centre, du second foyer et des sommets, ainsi que l'enveloppe de la seconde directrice. Trouver aussi le lieu du point de rencontre des sécantes communes à la conique et à l'hyperbole.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. J. Déprez. Remplaçons l'hyperbole équilatère par une conique qui reste semblable à elle même; soient $FF' = 2d$, φ l'angle de l'axe focal de la conique variable et de la droite FF'; prenons FF' pour axe polaire et F pour pôle.

L'équation de la conique variable est

$$\rho = \frac{2dk\cos\varphi}{1 + k\cos(\omega - \varphi)}.$$

L'enveloppe a pour équation

$$\rho^2(k^2 - 1) - 4dk^2\rho\cos\omega + 4d^2k^2 = 0.$$

La conique variable enveloppe un cercle de centre $\left[\frac{2dk^2}{k^2-1}, 0\right]$, et de rayon $\frac{2dk}{k^2-1}$.

D étant la projection de F sur la directrice correspondante, O le centre, F_1 le second foyer; S, S' les sommets situés sur l'axe focal, T, T' les deux autres sommets, D' le pied de la seconde directrice de la conique variable, on a

$$\frac{FD}{FO} = \frac{k^2 - 1}{k^2},\ OF_1 = OF,\ \frac{FS}{FO} = \frac{k-1}{k},\ \frac{FS'}{FO} = \frac{k+1}{k},\ \frac{FD'}{FO} = \frac{k^2+1}{k^2}.$$

Or D décrit la circonférence ayant FF' pour diamètre, donc O, F_1, S, S', D' décrivent des circonférences passant par F et dont les centres se trouvent sur FF'; la perpendiculaire à FD' en D', c'est-à-dire la seconde directrice passe donc par un point fixe situé sur FF'.

Les triangles FOT, FOT' restent toujours semblables à eux mêmes, le sommet F est fixe, le sommet O décrit une circonférence, donc les sommets T, T' décrivent des circonférences.

Le point de rencontre des sécantes communes à la conique donnée et à la conique variable se trouve au point de rencontre des directrices, relatives au foyer F des deux coniques.

Le point demandé décrit donc la directrice, relative au foyer F, de la conique fixe.

Autre solution par M. Rose.

Digitized by Google

×Question 1250.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 280).

Calculer les coordonnées du point dont la droite de Simson par rapport au triangle de référence ABC *est parallèle à la droite de Lemoine, ou à l'axe antiorthique (joignant les pieds des bissectrices extérieures), ou à l'axe orthique (axe d'homologie du triangle orthique et de* ABC). (E. Lemoine.)

Solution par M. J. Déprez. Plus généralement, calculons les coordonnées du point P, dont la droite de Simson par rapport à ABC est parallèle à la droite $\Delta \equiv Ax + By + Cz = 0$.

Soit A′ le point où la parallèle à Δ, menée par le sommet A, coupe la circonférence ABC; P sera le point où la perpendiculaire abaissée de Δ′ sur BC, rencontre la circonférence ABC.

La parallèle à Δ menée par A a pour équation

$$y[a\mathrm{B} - b\mathrm{A}] + z[a\mathrm{C} - c\mathrm{A}] = 0;$$

les coordonnées du point A′ sont

$$\frac{1}{c[a\mathrm{C} - c\mathrm{A}] - b[a\mathrm{B} - b\mathrm{a}]}, \quad \frac{1}{a[a\mathrm{B} - b\mathrm{A}]}, \quad \frac{-1}{a[a\mathrm{C} - c\mathrm{A}]},$$

et les coordonnées du point P sont

$$\frac{1}{-\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos\mathrm{C} + \mathrm{C}\cos\mathrm{B}}, \quad \frac{1}{\mathrm{A}\cos\mathrm{C} - \mathrm{B} + \mathrm{C}\cos\mathrm{A}}, \quad \frac{1}{\mathrm{A}\cos\mathrm{B} + \mathrm{B}\cos\mathrm{A} - \mathrm{C}},$$

1° Si Δ est la droite de Lemoine, $\Delta \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{a[b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2]}, \ldots$$

Le point P est donc le point de Tarry du triangle.

2° Si Δ est l'axe antiorthique, $\Delta \equiv x + y + z = 0$, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{\mathrm{R}\cos\mathrm{A} - r}, \ldots$$

3° Si Δ est l'axe orthique $\Delta \equiv x\cos\mathrm{A} + y\cos\mathrm{B} + z\cos\mathrm{C} = 0$, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{\cos\mathrm{A} - 2\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}, \ldots$$

Digitized by Google

Le point P est diamétralement opposé au foyer de la parabole de Kiepert.

Remarque. Si Δ est la droite joignant le centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit, on a $\Delta \equiv \Sigma x(\cos B - \cos C) = 0$; les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{b-c}, \quad \frac{1}{c-a}, \quad \frac{1}{a-b}.$$

Autre solution par M. Emmerich.

Question 1266.

(Voir *Mathesis*, 2, X, pp. 104 et 128).

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de centre* O,N *et* T *les points de rencontre de la normale et de la tangente en* M *avec le grand axe,* P′ *et* Q′ *les projections de* M′ *sur le grand axe et le petit axe,* R *et* R′ *les rayons des cercles circonscrits aux triangles* MOT *et* MON. *Démontrer que*

$$R = \frac{OM \times OM'}{2M'P'}, \quad R' = \frac{OM \times OM'}{2M'Q'}$$

(E. N. Barisien.)

Solution par H. Descans (Bruxelles). 1° On sait que

$$R = \frac{OM}{2 \sin OTM}.$$

Mais la tangente MT à l'extrémité M du diamètre OM étant parallèle au diamètre OM′ conjugué de OM, l'angle OTM = M′OP′. Donc

$$\sin M'OP' = \frac{M'P'}{OM'}, \quad R = \frac{OM \times OM'}{2M'P'}.$$

2° Dans le triangle OMN,

$$R' = \frac{OM}{2 \sin ONM} = \frac{OM}{2 \sin TNM}.$$

Mais les angles TNM, Q′OM′ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Donc

$$\sin TNM = \sin Q'OM' = \frac{M'Q'}{OM'}, \quad R' = \frac{OM \times OM'}{2M'Q'}.$$

Même solution par MM. G. Gérard, Lebocq (Bruxelles). Solution analytique par MM. Emmerich et Cardoso-Laynes.

Digitized by Google

×Question 1377.

(Voir *Mathesis* (2) t. X, p. 176.)

On donne les angles d'un triangle ABC, *et le rayon r du cercle inscrit, qui touche* BC, CA, AB *aux points* D, E, F. *Lorsque la figure tourne autour de la bissectrice de l'angle* BAC, *calculer les surfaces engendrées par les droites* AF, FB, EC *et par les deux arcs que sous-tend la corde* FE. *Trouver également les volumes engendrés par les triangles curvilignes ayant pour côtés les droites* AF, AE *et l'un des arcs du cercle* FE.

Solution par MM. François (La Haye), Plakhovo et Emmerich. Il suffit d'indiquer les résultats.

1. Surfaces engendrées par les droites AF, FB, EC :

$$S_1 = \pi r^2 \cot \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A,$$

$$S_2 = \pi r^2 \cot \tfrac{1}{2}B \left(\cos \tfrac{1}{2}A + \frac{\sin \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}B}\right),$$

$$S_3 = \pi r^2 \cot \tfrac{1}{2}C \left(\cos \tfrac{1}{2}A + \frac{\sin \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}C}\right).$$

2. Surfaces engendrées par les arcs FE :

$$S_4 = 2\pi r^2 (1 - \sin \tfrac{1}{2}A),$$
$$S_5 = 2\pi r^2 (1 + \sin \tfrac{1}{2}A).$$

3. Volume du cône AEF

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{(1 - \sin \frac{1}{2}A)^2 (1 + \sin \frac{1}{2}A)^2}{\sin \frac{1}{2}A}.$$

4. Volumes des segments engendrés par la droite FE et les arcs FE :

$$V_2 = \tfrac{1}{3}\pi r^3 (1 - \sin \tfrac{1}{2}A)^2 (2 + \sin \tfrac{1}{2}A),$$
$$V_3 = \tfrac{1}{3}\pi r^3 (1 + \sin \tfrac{1}{2}A)^2 (2 - \sin \tfrac{1}{2}A).$$

5. Volumes engendrés par les triangles curvilignes ayant pour côtés les droites AF, AE et l'un des arcs de cercle FE :

$$V_4 = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{(1 - \sin \frac{1}{2}A)^2}{\sin \frac{1}{2}A}, \quad V_5 = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{(1 + \sin \frac{1}{2}A)^2}{\sin \frac{1}{2}A}.$$

×QUESTION D'EXAMEN.

962. Vérifier les identités suivantes relatives à trois lettres a, b, c, le signe sommatoire indiquant la somme de trois termes qui se déduisent du premier par une permutation tournante de a, b, c.

Digitized by Google

1° $\Sigma a\,(b-c)^2 + 8abc = (a+b)(b+c)(c+a)$.

2° $\Sigma a\,(b+c)^2 - 4abc = (a+b)(b+c)(c+a)$.

3° $\Sigma\,(a+b)(b+c)(c-a) + (a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

4° $\Sigma\,(a+b)\,(b+c)\,(c-a) - (a+b)\,(b+c)\,(c+a) + 2\,\Sigma ab^2 + 2abc = 0$.

5° $\Sigma\,(a+b)(b-c)(c-a) + (a-b)(b-c)(c-a) = 6abc - 2\Sigma ab^2$.

6° $\Sigma\,(a-b)^2(a^2-b^2) = 2\Sigma a\,.\,(a-b)(b-c)(c-a)$.

7° $\Sigma\,(a+b)(2a+b+c) = 3\Sigma a^2 + \Sigma ab$.

8° $\Sigma a\,(a-b+c) = \Sigma a\,(a+b-c) = \Sigma a^2$.

(Extrait du *Supplemento al Periodico di Mathematica.*)

963. Trouver la relation qui doit exister entre m et m' pour que le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{x^2 + 2mx + 1}{x^2 + 2m'x + 1}$$

soient égaux et de signes contraires. Quels sont-ils pour $m = 5$?

(*Bacc.*, Paris, 1900).

Réponse. 1° $mm' = 1$, 2° ± 5.

964. Soient O et H le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et l'orthocentre. Les parallèles menées par H aux rayons OA, OB, OC rencontrent respectivement BC, CA, AB aux points α, β, γ. Démontrer que les droites Aα, Bβ, Cγ sont concourantes.

Les droites AO, BO, CO rencontrent BC, CA, AB aux points α', β', γ' qui sont les symétriques de α, β, γ par rapport aux milieux des côtés de ABC...

965. Si deux nombres sont premiers avec 3, la différence de leurs sixièmes puissances est un multiple de 9. (*J. de Vuibert*).

A déduire de $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$.

966. On donne la base BC $= 2a$ d'un triangle ABC. Trouver le lieu du sommet A dans les hypothèses suivantes :

1° $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}^2 C$ (hyperbole); 2° $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = k$ (conique); 3° $B + 2C = 180°$ (circonférence); 4° $B = 2C$ (hyperbole); 5° $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k$ (parabole); 6° $\operatorname{tg} B = k \operatorname{tg} C$ (droite); 7° $B - C = 90°$ (hyperbole équilatère); 8° $\operatorname{tg} B = \sin C$ (parabole); 9° $\operatorname{tg} B = \sin 2C$ (ellipse); 10° $\operatorname{tg} B = -\sin 2C$ (hyperbole équilatère).

Si $\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C = 2$, l'orthocentre décrit une hyperbole équilatère.

Digitized by Google

Si cot B — cot C = k, l'orthocentre décrit une hyperbole et le point de Lemoine parcourt une droite (E. N. Barisien).

967. Si l'on donne

$$a = \frac{x^2 - y}{1 - xy}, \quad b = \frac{y^2 - x}{1 - xy}$$

démontrer que

$$x = \frac{a^2 - b}{1 - ab}, \quad y = \frac{b^2 - a}{1 - ab}$$

(*Educational Times*).

Cette question ne diffère pas de la suivante, devenue classique :

Si l'on a

$$a : b : c = x^2 - yz : y^2 - xz : z^2 - xy,$$

on a aussi

$$x : y : z = a^2 - bc : b^2 - ac : c^2 - ab.$$

Il suffit de supposer $z = c = 1$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1289. On considère tous les triangles de même base BC et dont l'angle au sommet A est constant. Démontrer que les points de contact des côtés AB, AC avec les quatre cercles tritangents décrivent des limaçons de Pascal. (J. Déprez.)

1290. On considère les triangles ABC qui ont leur sommet A fixe et dont le côté BC se déplace sur une droite fixe avec la condition B — C = 90°.

Trouver les lieux décrits par le point de Lemoine et par ses associés. Examiner les *parties parasites* de ces lieux. (E. N. Barisien.)

1291. Démontrer que si les aires du cercle osculateur et de la conique osculatrice, en un point quelconque d'une courbe sont mesurées par un même nombre, celui-ci est proportionnel au cube de l'arc.

(E. Cesàro).

***1292.** Dans un triangle sphérique ABC, rectangle en A, on porte sur AC l'arc AD égal au complément de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle B, et du point D comme pôle, on décrit l'arc de petit cercle BE rencontrant le prolongement de DA en E; l'arc AE mesure la surface du triangle proposé. (C. E. W.)

Digitized by Google

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE L'ADDITION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES,

par M. G. Fontené, professeur au Collège Rollin, à Paris.

Je me propose d'établir les deux formules fondamentales de la théorie des fonctions hyperboliques, d'une manière élémentaire entièrement analogue à celle qui donne les formules fondamentales de la théorie des fonctions circulaires.

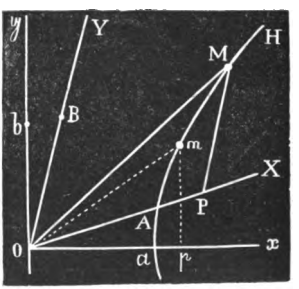
A cet effet, je montrerai que *l'on peut prendre, dans l'hyperbole équilatère comme dans le cercle, une origine quelconque pour les arguments.* Je me conformerai d'ailleurs le plus possible aux habitudes reçues.

1. *Secteurs hyperboliques équivalents.* Soit une hyperbole équilatère H, ayant pour équation par rapport aux axes rectangulaires Ox, Oy,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et, en coordonnées obliques, par rapport à deux diamètres conjugués OX, OY faisant entre eux un angle Θ,

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{A^2} = 1,$$



avec la relation

$$A^2 \sin\Theta = 1$$

qui traduit le second théorème d'Apollonius.

Appelons *points correspondants* les points $m(x, y)$, M (X, Y), dont les coordonnées, dans les deux systèmes, sont liées par les relations

$$x = \frac{X}{A}, \quad y = \frac{Y}{A}.$$

Si l'on considère un triangle Om_1m_2 ayant pour sommets l'origine et deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans le premier système d'axes, et le triangle OM_1M_2 ayant pour sommets l'origine et deux points (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), qui sont les correspondants des deux points ci-dessus dans le second système d'axes, les aires de ces deux triangles sont égales; on a, en effet,

$$\frac{1}{2}(X_1Y_2 - X_2Y_1)\sin\Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{A}\frac{Y_2}{A} - \frac{X_2}{A}\frac{Y_1}{A}\right) \times A^2 \sin\Theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1y_2 - x_2y_1\right).$$

Digitized by Google

Deux secteurs hyperboliques dont les sommets sont l'origine et des points correspondants ont aussi des aires égales; car ils sont égaux à deux limites de sommes de triangles équivalents qui ont pour sommets l'origine et des points correspondants sur la courbe. Ainsi, par exemple, les secteurs O*am* et OAM sont équivalents.

2. *Définition des fonctions hyperboliques* Ch*u* *et* Sh*u*. Désignons par *u* le double de l'aire du secteur O*am* ou OAM, cette aire étant prise avec le signe commun des ordonnées de *m* et de M. Le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique* de *u*, en abrégé Ch*u* et Sh*u*, sont définis par les égalités

$$\mathrm{Ch}u = x = \frac{X}{A}, \quad \mathrm{Sh}u = y = \frac{Y}{A},$$

x et *y* étant les coordonnées du point *m* par rapport aux axes O*x*, O*y*, tandis que X et Y sont les coordonnées du point M par rapport aux axes OX, OY. Les expressions $\frac{X}{A}$ et $\frac{Y}{A}$ serviront uniquement pour le problème de l'addition des arguments.

3. *Théorème de l'addition.* Soient deux arguments *v* et *u*. Prenons

$$2.\ \text{Aire } OaA = v, \quad 2.\ \text{Aire } OAM = u, \quad 2.\ \text{Aire } OaM = v + u;$$

pour l'argument *u*, nous emploierons les axes OX, OY, en observant que les deux angles *x* OX et *y* OY sont égaux (Les lignes tracées en pointillé sur la figure ne servent pas à la démonstration actuelle).

Ayant mené MP parallèle à OY, on a, en projetant sur un axe quelconque,

$$\text{proj. OM} = \text{proj. OP} + \text{proj. PM},$$

ou

$$\text{proj. OM} = \text{proj. OA} \times \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} + \text{proj. OB} \times \frac{\overline{PM}}{\overline{OB}},$$

c'est-à-dire

$$\text{proj. OM} = \text{proj. OA. Ch } u + \text{proj. OB. Sh } u.$$

Si la projection est faite sur O*x*, en observant que la projection de OB sur O*x* est égale à celle de OA sur O*y*, on a

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Ch}(v+u) = \mathrm{Ch}\,v.\,\mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Sh}\,v.\,\mathrm{Sh}\,u.$$

Si la projection est faite sur O*y*, on a de même

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Sh}(v+u) = \mathrm{Sh}\,v.\,\mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Ch}\,v.\,\mathrm{Sh}\,u.$$

Digitized by Google

Les axes OX, OY sont analogues à ceux que l'on trace dans la démonstration classique de la formule qui donne cos $(a+b)$ et le fait relatif aux projections de OB joue le même rôle que la formule $\cos(v+\frac{1}{2}\pi) = -\sin v$.

4. Remarque. Si je n'avais craint de trop m'écarter du point de vue habituel, j'aurais défini les fonctions hyperboliques sur une hyperbole quelconque, rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, soit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'argument u est alors le rapport de l'aire d'un secteur hyperbolique Oam à l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués, et l'on a

$$\mathrm{Ch}\, u = \frac{x}{a}, \quad \mathrm{Sh}\, u = \frac{y}{b},$$

x et y étant les coordonnées du point m. Les fonctions de u ainsi définies dépendent uniquement de u, la considération des points correspondants montrant immédiatement que ces fonctions restent les mêmes quand on prend un autre système de diamètres conjugués, ou quand on change l'hyperbole employée. On a, en effet, pour deux triangles correspondants Om_1m_2, OM_1M_2, dont on compare les aires à celles des parallélogrammes mentionnés,

$$\frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sin\theta}{ab\sin\theta} = \frac{x_1}{a}\frac{y_2}{b} - \frac{x_2}{a}\frac{y_1}{b},$$

$$\frac{(X_1Y_2 - X_2Y_1)\sin\Theta}{AB\sin\Theta} = \frac{X_1}{A}\frac{Y_2}{B} - \frac{X_2}{A}\frac{Y_1}{B},$$

et ces deux rapports sont égaux si un point m et un point M se correspondent par les formules

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}.$$

On a là une idée et un calcul très-nets.

Digitized by Google

LES COURBES PARALLÈLES AUX ASTÉROÏDES SONT-ELLES TOUJOURS DES ASTÉROÏDES?

Note par M. GINO LORIA, Professeur à la faculté des Sciences de Gênes.

I.

Une *astéroïde*(*) est la courbe enveloppée par une droite mobile r sur laquelle deux droites fixes a, b déterminent un segment dont la longueur l est donnée. Si l'on désigne par 2α l'angle formé par les deux droites données et si l'on prend pour axes de coordonnées les bissectrices de cet angle et de son supplément, on pourra représenter ces deux droites par les équations

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha.$$

Soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

l'équation générale de la droite r, p étant une fonction déterminée de φ. Pour trouver cette fonction, il suffit d'écrire que la distance entre les points pa et pb est égale à l. On trouve ainsi

$$p = \frac{l \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

L'astéroïde considérée est donc l'enveloppe des droites représentées par l'équation :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}(\cos 2\varphi + \cos 2\alpha). \tag{1}$$

Différentiant cette équation, on trouve

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = \frac{l}{\sin 2\alpha} \sin 2\varphi; \tag{2}$$

résolvant les équations (1) et (2) par rapport à x, y, on obtient les équations

$$x = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}\left[\frac{3}{2}\cos \varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi + \cos 2\alpha \cos \varphi\right], \tag{3}$$

$$y = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}\left[-\frac{3}{2}\sin \varphi - \frac{1}{2}\sin 3\varphi + \cos 2\alpha \sin \varphi\right],$$

qui représentent la courbe dont il s'agit à l'aide du paramètre φ. Suppo-

(*) D'autres auteurs appelles la même courbe *astroïde* quand les droites a, b, sont rectangulaires. Au point de vue étymologique, les deux désignations se justifient également bien (P. M.).

Digitized by Google

sons, en particulier, que l'astéroïde soit *régulière*, c'est-à-dire que $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$; les équations précédentes deviennent :

$$x = \frac{l}{4}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi), \quad y = \frac{-l}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi).$$

Différentiant les équations (3) et élevant les résultats au carré, on arrive à l'expression suivante pour la dérivée de l'arc s :

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(\cos 2\alpha - 3\cos 2\varphi)$$

d'où

$$(4) \qquad s = \frac{l}{2\sin 2\alpha}\left(\varphi\cos 2\alpha - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right) + \textit{constante}.$$

L'équation (2) représente la normale à l'astéroïde ; en la différentiant, on trouve

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{2l}{\sin 2\alpha}\cos 2\varphi,$$

et le rayon de courbure R de l'astéroïde est donné par la formule

$$(5) \qquad R = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(\cos 2\alpha - 3\cos 2\varphi).$$

Si on pose maintenant $2\varphi = \omega + \frac{1}{2}\pi$ et si l'on choisit d'une manière convenable l'origine des arcs et le sens positif sur la courbe, on voit la possibilité de remplacer les équations (4), (5) par les suivantes :

$$(6) \quad R = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(3\sin\omega + \cos 2\alpha); \quad s = \frac{l}{4\sin 2\alpha}(3\cos\omega - \omega\cos 2\alpha).$$

On peut remarquer en passant la relation

$$2\frac{ds}{d\omega} + R = 0.$$

En éliminant ω entre les équations (6), on aurait l'équation intrinsèque de l'astéroïde ; mais il vaut mieux conserver les deux équations ; si l'on fait $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$, elles deviennent simplement

$$(7) \qquad R = \frac{3l}{2}\sin\omega, \quad s = \frac{3l}{4}\cos\omega.$$

En examinant les équations (6), on voit tout de suite qu'elles sont de la forme suivante

$$(8) \qquad R = k\sin\omega + a, \quad s = \tfrac{1}{2}(k\cos\omega - a\omega);$$

cela fait naître la question de savoir si tout couple d'équations de cette

Digitized by Google

forme représente une astéroïde. Pour répondre à cette question, il suffit de chercher si les équations (8) peuvent toujours se réduire à la forme (6) par un choix convenable des constantes l, α; pour cela, on doit avoir

$$k = \frac{3l}{2\sin 2\alpha}, \quad a = \frac{l}{2\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Or ces équations donnent

$$\cos 2\alpha = \frac{3a}{k}, \quad l = \frac{2\sqrt{k^2 - 9a^2}}{3};$$

par conséquent α et l seront des quantités réelles seulement lorsque

$$|k| > 3|a|. \tag{9}$$

Nous pouvons en conclure que *les équations* (8) *représentent une astéroïde seulement si les constantes* a, k *satisfont à la condition* (9). Dans le cas contraire, on n'a plus aucune construction réelle pour la courbe réelle représentée par les équations (8) (on peut l'appeler *para-astéroïde*); mais on peut en obtenir une tout à fait différente par les considérations suivantes.

II.

On sait (et il est d'ailleurs très-facile de le prouver) que si R, s sont le rayon de courbure et l'arc d'une courbe Γ, et R_1, s_1 les éléments analogues de sa développée Γ_1, on a les relations, c étant une constante,

$$R_1 = R\frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R + c.$$

Il s'ensuit que si Γ et Γ' sont deux courbes ayant la même développée, on aura les relations suivantes :

$$R\frac{dR}{ds} = R'\frac{dR'}{ds'}, \quad R + c = R' + c';$$

si on fait $c - c' = a$, la seconde de ces relations devient $R' = R + a$ et la première peut s'écrire

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{a}{R}.$$

Comme deux courbes ayant la même développée sont des courbes parallèles, nous pouvons résumer ces observations en disant que *les relations*

$$R' = R + a, \quad s' = s + a\int\frac{ds}{R} \tag{10}$$

Digitized by Google

déterminent le rayon de courbure et l'arc d'une courbe parallèle à la courbe dont R *et* s *sont le rayon de courbure et l'arc.*

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse de l'astéroïde représentée par les équations (7). Toute courbe parallèle sera représentée par les équations

$$R = \frac{3l}{2}\sin\omega + a, \quad s = \frac{3l}{4}\cos\omega - \frac{a}{2}; \tag{11}$$

elle *est donc en général une para-astéroïde*; mais elle peut être une astéroïde; la condition pour cela est une conséquence de la condition (9); elle est précisément

$$|a| < \frac{l}{2}.$$

Donc *la courbe parallèle à une astéroïde régulière est une astéroïde seulement lorsque la distance constante entre les deux courbes est plus petite que la moitié du segment rectiligne générateur de la première.* Une proposition établie par M. Salmon(*) a par conséquent une portée moindre que l'on ne le croyait, ce qui d'ailleurs se reconnaît aussi en examinant attentivement le raisonnement par lequel il l'établit.

Ajoutons que la comparaison des équations (8) (11) montre que *toute para-astéroïde (en particulier toute astéroïde) peut être considérée comme la courbe parallèle à une astéroïde régulière.* Et comme toute courbe parallèle à une courbe Γ est elle-même parallèle à Γ, on peut dire que : *toutes les courbes parallèles aux astéroïdes ou aux para-astéroïdes sont des para-astéroïdes ou des astéroïdes.*

Gênes, 26 juillet 1900.

NOTES SUR L'ASTROÏDE ET SES COURBES PARALLÈLES;

par M. Neuberg.

J'appellerai *astroïde* (Voir H. Brocard, *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*), l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui se meut entre deux axes rectangulaires; on sait que cette enveloppe est une *hypocycloïde à quatre rebroussements.* Je propose la dénomination d'*astroïdales* pour les courbes parallèles à l'astroïde; comme une astroïde

---

(*) Salmon-Fiedler. *Anal. Geom. der hoheren ebenen Curven* (Leipzig, 1873), p. 119-120 ou *Higher Plane Curves*, n° 117bis. Ex. 2, p. 99, de la 2de édition. Je crois que le même théorème a été proposé par Laguerre dans les *Nouvelles Annales* (question 1391) et démontré en 1883 par M. d'Ocagne.

Digitized by Google

a pour développée une autre astroïde, les astroïdales sont aussi des développantes d'astroïde. Les unes de ces courbes peuvent être considérées comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes, les autres n'admettent pas ce mode de génération; pour distinguer ces deux espèces, j'adopte les expressions de *astroïdales accourcies* (*tétracuspides* de Bellavitis), *astroïdales allongées*. Ces dernières courbes sont les para-astéroïdes de M. Gino Loria. La transition d'une espèce à l'autre est formée par des courbes qui ont été étudiées par M. d'Ocagne, dans son étude sur les coordonnées axiales (§ 50) (Voir aussi les N. A. M., 1884, 556).

Voici quelques développements sur ces courbes; je les emprunte en grande partie à un article très substantiel de M. Maunheim (N. A. M., 1878, p. 321).

Soit AB une droite de longueur constante l, dont les extrémités A, B se meuvent sur deux droites fixes Ox, Oy, faisant entre elles l'angle 2α (Le lecteur est prié de faire la figure). Pour un déplacement infiniment petit de AB, on obtient le centre instantané de rotation C en élevant respectivement à Ox, Oy les perpendiculaires AC, BC. Les quatre points O, A, C, B sont sur une circonférence Δ dont OC est un diamètre. Comme ce diamètre est égal à $l : \sin 2\alpha$, sa longueur est constante, quelle que soit la position de AB; par suite, pendant le déplacement continu de AB, le point C se meut sur une circonférence Δ', de centre O.

Appelons P′ le plan xOy, supposé fixe, et appelons P un plan qui glisse sur P′, étant entraîné par la droite AB à laquelle il est invariablement lié. Pour définir le mouvement de ce plan P (*mouvement de la Hire*), on peut dire que la circonférence Δ du plan P roule sans glisser sur la circonférence Δ' du plan P′. Dans ce mouvement, un point quelconque de Δ décrit sur P′ une droite passant par O; un point non situé sur Δ se meut sur une ellipse.

Soient M, N les extrémités du diamètre de Δ parallèle à AB; ces points parcourent deux diamètres rectangulaires Ox', Oy' de Δ'. La droite MN a donc pour enveloppe une *astroïde* U. La droite AB parallèle à MN et située à une distance constante de MN, enveloppe une courbe parallèle à U ou, d'après la terminologie proposée ci-dessus, une astroïdale. Il est clair que tout diamètre de Δ, pendant le mouvement de P sur P′, enveloppe une astroïde, et qu'une droite quelconque de P enveloppe une astroïdale.

Digitized by Google

Soit λ une droite quelconque du plan P; pour plus de facilité, nous la supposons parallèle au diamètre MN de Δ. Elle a pour enveloppe une astroïdale. Il y a lieu de distinguer trois cas :

1° La droite λ coupe Δ en deux points réels α, β; la longueur $\alpha\beta$ étant constante et les points α, β se déplaçant sur deux diamètres fixes de Δ', le mouvement de λ peut être défini ainsi : une droite de longueur constante se meut entre deux droites fixes, non rectangulaires. L'enveloppe de $\alpha\beta$ est une *astroïdale accourcie*.

2° La droite λ est extérieure à Δ. Son mouvement n'est plus susceptible de la définition qui vient d'être donnée. L'enveloppe est maintenant une *astroïdale allongée*.

3° La droite λ touche Δ au point L. Soit L' le point de Δ diamétralement opposé à L. Le mouvement de λ est susceptible de la définition suivante : Une droite LL', de longueur constante, se meut entre deux axes rectangulaires; en L, on élève une perpendiculaire λ à LL'. L'enveloppe de λ est maintenant une *astroïdale de d'Ocagne* (Comparez BROCARD, l. c. I, p. 104, au mot *cubocycloïde*).

×CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRAPÈZE

par M. PHILIPPIN, professeur à l'athénée de Bruges.

Dans le *Traité de Géométrie* de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, une construction élégante du centre de gravité d'un trapèze est déduite de considérations élémentaires très simples; comme la démonstration me paraît présenter une lacune, je reprendrai ici la question.

Soient $AB = a$, $DC = b$ les bases d'un trapèze ABCD, I et K leurs milieux, G, G', G'' les centres de gravité des aires du trapèze ABCD et des triangles ABD, BCD. Le point G est le centre des distances proportionnelles des points G', G'' affectés de coefficients proportionnels à ABD, BCD, ou ce qui revient au même, des coefficients $3a$, $3b$. Mais on peut remplacer le point G' par le système des trois points A, B, D ayant chacun un coefficient égal à a; de même le point G'' peut être remplacé par les points B, C, D affectés chacun du coefficient b. On a donc en somme à prendre le centre des distances proportionnelles des quatre points A, B, C, D affectés respectivement des coefficients

$$a, \quad a+b, \quad b, \quad a+b. \tag{1}$$

Si l'on fait le même raisonnement sur le trapèze décomposé en deux

Digitized by Google

triangles ABC, ACD par la diagonale AC, on trouve que G est le centre des distances proportionnelles des sommets A, B, C, D auxquels on donne les coefficients

$$a+b, \quad a, \quad a+b, \quad b. \tag{2}$$

On peut encore prendre pour coefficients les sommes des nombres correspondants (1) et (2), c'est-à-dire

$$2a+b, \quad 2a+b, \quad a+2b, \quad a+2b.$$

Or les points A et B affectés chacun du coefficient $2a+b$ peuvent être remplacés par le point I ayant pour coefficient $4a+2b$; de même, les points C et D affectés du coefficient $a+2b$ peuvent être remplacés par le point K ayant pour coefficient $2a+4b$. Il en résulta qu'on obtiendra le point G en divisant IK dans le rapport

$$\frac{IG}{GK}=\frac{2a+4b}{4a+2b}=\frac{\frac{1}{2}a+b}{a+\frac{1}{2}b}.$$

Par suite, si on prolonge BA de AE = DC, et DC de CF = AB, la droite EF coupera IK au point demandé G.

BIBLIOGRAPHIE.

Dr. **F. Amodeo**, libero docente di Geometria projettiva nella R. Universita di Napoli. **Aritmetica particolare e generale.** Napoli, L. Pierro. 1900 (XV-415 p. in 12). Prix : 3 fr.50.

Sommaire. 1. Opérations sur les nombres entiers. 2. Propriétés des nombres entiers. 3. Nombres entiers négatifs et positifs. 4. Nombres rationnels entiers ou fractionnaires. 5. Nombres réels, rationnels ou irrationnels, logarithmes. 6. Limites, génératrices, ensembles. 7. Proportions, moyennes, progressions. 8. Mesure des grandeurs. Applications usuelles de l'arithmétique. 9. Nombres complexes et quaternions. 10. Sommaire de logique mathématique.

Exposé systématique, dans un ordre strictement logique, des principes de l'arithmétique ; par suite, il n'est peut-être pas tout à fait approprié aux exigences de l'enseignement élémentaire ; mais il sera très utile aux professeurs qui désirent approfondir les bases de l'arithmétique. (D'après O. Tedone, dans le *Bollettino de Bibliografia* de G. Loria, 1900, t. III, pp. 28-29. Nous ne croyons pas justifiées deux ou trois critiques de détail de M. Tedone. P. M.)

Cours d'Arithmétique élémentaire par Ad. Mineur, professeur à l'Université libre de Bruxelles. Quatrième édition Bruxelles, Stevens, 1899 (236 p. in 8°).

Sommaire. 1. Numération. 2. Calcul des nombres entiers. 3. Propriétés des nombres. 4. Fractions. 5. Puissances et racines. 6. Nombres incommensurables

Digitized by Google

(40 pages); approximations numériques (24 pages). 7. Arithmétique pratique. 8. Questions à résoudre (relatives à l'arithmologie; il y en a 180).

On peut recommander ce livre, aux professeurs, un peu moins, et aux élèves, un peu plus que celui de M. AMODEO.

Éléments de la théorie des nombres, par A. CAHEN, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, professeur de mathématiques au collège Rollin. Paris, Gauthier-Villars, 1900 (VIII-403 pages in 8°). Prix : 12 francs.

Sommaire : 1. Rappel des théories élémentaires. 2. Compléments : indicateur, fractions continues. 3. Les congruences. 4. Restes quadratiques. Congruences du second ordre. 5. Les nombres incommensurables et les nombres algébriques. 6. Formes quadratiques binaires. Analyse indéterminée du second degré (115 pages). 7. Notes diverses, entre autres sur le nombre des nombres premiers et sur les nombres entiers algébriques. 8. Tables diverses.

Cet ouvrage comble vraiment une lacune dans la littérature mathématique française; il a sa place marquée dans la bibliothèque de tous ceux qui ne possèdent pas la *Zahlentheorie* de Dirichlet et Dedekind, ou le livre analogue de Bachmann. C'est une excellente introduction aux théories les plus élevées de l'arithmétrique supérieure. (D'après CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, dans la *Revue des questions scientifiques*, avril 1900, (2) XVII, pp. 601-604).

M. Nasso. Algebra elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici (1° biennio, Torino, tipografia e libreria salesiana, 1898 (cartonné de 426 p. in 12). Prix : 3 fr. 50.

Sommaire. Première partie. I. Nombres rationnels. 1. Nombres avec un signe. 2-5. Les opérations algébriques. 6. Fractions algébriques. 7-9. Équations à une et à deux inconnues. II. Les nombres irrationnels. 1-2. Classes de nombres et limites. 3. Radicaux. 4. Puissances. 5. Équations du second degré. 6. Équations exponentielles et logarithmes. III. Proportions et progressions. Logarithmes. *Appendice* : 1. Multiplication et division des polynomes. 2. Équations linéaires à plus de deux inconnues. 3. Équations se ramenant aux équations du premier et du second degré. 4. Applications des logarithmes aux questions d'intérêt. 5. Extraction de la racine carrée. *Seconde partie.* Exercices (160 pages, plus du tiers du livre).

Ce manuel d'algèbre élémentaire est presque toujours à la fois clair, simple et rigoureux; il contient de nombreuses notes historiques, des conseils pratiques pour diriger l'élève dans la résolution des problèmes, plus de 2000 exercices à résoudre et environ 400 exercices et problèmes résolus minutieusement (D'après R. BETTAZZI, dans le *Periodico di Matematica*, 1899, XIV, pp. 266-267).

F. MÜLLER. Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Première partie : français-allemand. Leipzig, Teubner; Paris, Gauthier-Villars; 1900 (XII-132 p. gr. in 8 à 2 colonnes). Prix : 8 marcs.

Digitized by Google

Complément indispensable, pour les mathématiciens, des dictionnaires allemands-français et français-allemands. Voici un spécimen d'une demi-colonne du vocabulaire :

Homocentre (de deux courbes concentriques) [géom. an.] *geometrischer Mittelpunkt, Homocentrum.*

Homocentrique (sphères) *homocentrisch, mit gemeinsamem Mittelpunkt.*

Homocyclique (système, figure, complexe, point) *kreisverwandt, homocyklisch.*

Homofocal, e (ou confocal) (complexe, conique, courbe, cyclique, ellipsoïde, quadrique, quartique, surface, système) *homofokal, mit gemeinsamem Brennpunkt.*

Homogène (coordonnées, fonction, expression, dilatation, équation, forme, groupe, invariant) *homogen, gleichartig.*

Homogénéité (d'une forme, d'une équation) [alg. sup.] *Homogeneität, Gleichartigkeit.*

Homographie (ou déformation homographique) (CHASLES 1837) [transf. géom.; géom. proj.] *Homographie, Collineation, Collinearität.* — **à deux axes,** *zweiachsige Homographie.* — **à une, deux, trois dimensions,** *Homographie von 1, 2, 3 Dimensionen.* — **sur une droite,** *Homographie auf einer Geraden.* **des espaces,** *Homographie der Räume.* — **des faisceaux de droites et de plans,** *Homographie der Geraden- und Ebenenbüschel.* — **involutive,** *involutorische Homographie.* — **des systèmes de points et de droites,** *Homographie der Punkt- und Geradensysteme.*

Homographique (ou collinéaire) (cône, division, élément, faisceaux, figure, invariant, surface, système, transformation) (CHASLES 1837) *homographisch, allgemein collinear verwandt, projectivisch.*

Pour donner une idée de la richesse de la nomenclature mathématique, il suffit de faire remarquer avec le savant auteur, qu'il y a 119 expressions commençant par le mot *angle*, 89 par *axe*, 130 par *cercle*, 97 par *coordonnées*, 363 par *courbe*, 189 par *équation*, 220 par *fonction*, 190 par *ligne*, 156 par *nombre*, 220 par *point*, 242 par *surface*, 153 par *système*, 140 par *théorème*, etc.

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II, Heft 4. Leipzig, Teubner (31 juillet) 1900 (pp. 401-560 gr. in 8). Prix : 4 marcs 80.

Sommaire. 1. Groupes continus de transformations, par L. MAURER et H. BURKHARDT (401-436). 2. Équations différentielles avec conditions aux limites par M. BÔCHER (437-463). 3. Théorie du potentiel, par H. BURKHARDT et W. F. MEYER (464-503). 4. Équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites (504-560, inachevé), par A. SOMMERFELD.

Recueil de problèmes de géométrie analytique à l'usage des classes de mathématiques spéciales. *Solutions des Problèmes donnés aux Concours d'admission à l'École Polytechnique de* 1860 à 1900, par FR. MICHEL, Ancien élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'Exploitation aux Chemins de fer du Nord. Paris, Gauthier Villars, 1900 (VI-240 pages in-8, avec 60 figures). Prix : 6 fr.

Préface. Ce recueil d'exercices de Géométrie analytique comprend les solutions

Digitized by Google

de toutes les questions qui ont été posées au Concours d'admission à l'École Polytechnique depuis 1860 jusqu'en 1900.

Ces questions étaient jusqu'à présent éparses dans divers journaux ou recueils mathématiques, et il m'a semblé utile, pour éviter des recherches souvent fastidieuses, de les réunir et de donner une solution de chacune d'elles.

J'ai suivi, dans chaque cas, la marche la plus simple, celle qui s'impose pour ainsi dire; mais, tout en conservant la plus large place à la méthode analytique, je me suis appuyé quelquefois sur des considérations géométriques qui évitent des longueurs de calcul et qui rendent la solution à la fois plus courte et plus élégante.

Les Notes bibliographiques qui suivent chaque section permettent au lecteur de se rapporter aux Ouvrages ou périodiques dans lesquels il pourra trouver d'autres solutions; enfin, j'ai porté en regard de chaque énoncé l'indication de la classification du Répertoire bibliographique, qu'il importe de vulgariser.

Ainsi conçu, cet Ouvrage me paraît devoir rendre de nombreux services aux candidats à l'École Polytechnique; il répond, d'ailleurs, à des *desiderata* formulés dans quelques publications mathématiques et notamment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

Cours théorique et pratique d'Algèbre financière à l'usage des Ecoles supérieures de Commerce, des Etablissements d'enseignement moyen du premier degré et des personnes s'occupant d'opérations financières, par TH. KLOMPERS, Professeur de Mathématiques et de Physique à l'Athénée Royal d'Anvers. Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique (Prix De Keyn). Anvers, Impr. V^e^ Jos. Van Ishoven, 1900. Un vol. de XXXIX-364 pages in-8°. Prix : 5 fr.

TABLE DES MATIÈRES. *Première partie.* I. Intérêts simples. II. Intérêts composés. III. Escompte. IV. Annuités certaines et constantes. V. Problèmes généraux relatifs aux emprunts remboursables par annuités constantes. Usage des tables de l'amortissement. — VI. Rentes certaines et constantes. *a*) Rentes perpétuelles. Rentes sur l'État. *b*) Rentes temporaires ou limitées. *c*) Rentes amortissables à échéance déterminée. VII. Rentes certaines à terme variable. *a*) Rentes dont les termes varient en progression arithmétique. *b*) Rentes dont les termes varient en progression géométrique. VIII. Théorie de l'amortissement. *a*) Amortissement des emprunts publics et des rentes sur l'État. Caisse d'amortissement. *b*) Amortissement progressif. *c*) Emprunts par obligations. 1. Tableau d'amortissement. 2. Formules relatives aux emprunts par obligations. 3. Complication dans le service des titres. Emprunts avec lots. Emprunts-loteries à primes variables dont le service est fait par annuités constantes. (Emprunt communal de la ville d'Anvers, de 1887; emprunt de Bruxelles, de 1886; emprunt de Gand, de 1896; emprunt de Liége, de 1897). *d*) Amortissements des emprunts dont le service est fait par des rentes à termes variables (en progression arithmétique ou en progression géométrique).

Deuxième Partie. Opérations viagères. Institutions de Prévoyance. I. Rentes viagères sur une seule tête. II. Assurance en cas de décès. Opérations sur une seule

Digitized by Google

tête. Primes uniques des opérations fondamentales. III. Primes annuelles des opérations viagères sur une seule tête. IV. Assurances payables à une autre époque que la fin de l'année du décès. V. Calcul des chargements (des primes pures). VI. Notions sur la valeur des polices d'assurances et sur les réserves. VII. Institutions de prévoyance. *a*) Caisse de retraite sous la garantie de l'Etat belge. Calcul des tarifs. *b*) Sociétés de secours mutuels. Assurance contre la maladie.

Complément. Opérations viagères sur deux têtes. I. Rentes viagères. II. Assurances en cas de décès. III. Assurances conditionnelles ou de survie.

Principes de la notation universelle pour les opérations.

Tables. I. Conversion des jours en fractions décimales de l'année. II et III. Valeur de 1 franc, placé à intérêt composé après un certain nombre d'années ou de mois. IV. Valeur actuelle de 1 franc payable au bout d'un certain nombre d'années. V. Valeur acquise à la fin de chaque année par le placement annuel de 1 franc. VI Temps nécessaire pour doubler, tripler, etc. un capital. VII. Valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1 franc, payables à la fin de chaque année. VIII. Annuité par laquelle on peut amortir un capital de 1 franc au bout d'un certain nombre d'années. IX. Table des quantités servant au calcul des principales opérations viagères. X. Table de mortalité de Quetelet; table de morbidité de Kinkelin; table de commutation servant au calcul des tarifs de la Caisse de retraite.

La table des matières (avec traduction flamande) que nous venons de transcrire, nous dispense d'indiquer plus longuement les questions traitées par M Klompers, et de faire ressortir l'utilité de son ouvrage. En présence du développement extraordinaire que prend en Belgique l'enseignement des sciences commerciales, l'*Algèbre financière* vient à son heure. Ce manuel ne fait pas double emploi avec ceux qui sont déjà publiés; comme il est bien écrit et, parfaitement au courant de la science et des méthodes les plus usitées dans la pratique, il a déjà été accueilli avec faveur, même à l'étranger, et son succès s'affirmera davantage tous les jours.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1900.

Solution par M. KLOMPERS, professeur à l'athénée d'Anvers.

Première question de Géométrie analytique.

(Voir *Mathesis*, p. 217).

Désignons par (x', y'), $(-x'', -y'')$ les coordonnées des sommets A et C, mobiles sur le cercle principal. Les sommets B et D vérifient les équations des couples de tangentes à l'hyperbole issues de ces points :

$$(1)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-1\right)^2,$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{yy'}{b^2}-\frac{xx'}{a^2}-1\right)^2.$$

Digitized by Google

Si l'on retranche ces équations membre à membre, on obtient l'équation plus simple

$$\frac{xx'}{a^2} = \frac{yy'}{b^2}. \tag{2}$$

Par suite, pour trouver le lieu cherché, il suffit d'éliminer x' et y' entre les équations (1), (2) et l'égalité de condition

$$x'^2 + y'^2 = a^2. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) donnent

$$x'^2 = \frac{a^6 y^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}, \quad y'^2 = \frac{a^2 b^4 x^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$(a^2 y^2 - b^2 x^2)(c^2 x^2 - a^4) = 0.$$

L'équation $a^2 y^2 - b^2 x^2 = 0$ représente les asymptotes, solution qui ne convient pas; l'équation $c^2 x^2 - a^4 = 0$ représente les deux directrices.

Seconde question de Géométrie analytique.

(Voir *Mathesis*, p. 219.)

La résultante des deux forces agissant sur m doit être dirigée suivant la normale à la courbe, donc suivant la bissectrice de l'angle FMF′, ce qui exige que les deux forces soient égales; par conséquent, si l'on fait $MF = r$, $MF' = r'$, la condition d'équilibre est

$$\frac{mm'}{r^2} = \frac{mm''}{r'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{r'}{r} = \sqrt{\frac{m''}{m'}} = k.$$

D'autre part, on a

$$r + r' = 2a;$$

par suite,

$$r = \frac{2a}{1+k}.$$

On peut donc obtenir le point cherché en coupant l'ellipse par la circonférence lieu des points tels que $r' : r = k$, ou bien par la circonférence de rayon $\frac{2a}{1+k}$ et de centre F. Pour qu'il y ait une solution, ce rayon

Digitized by Google

doit être compris entre $FA = a - c$ et $FA' = a + c$, de sorte que l'on doit avoir

$$a - c < r < a + c,$$

ou

$$(a - c)(1 + k) < 2a < (a + c)(1 + k)$$

ou enfin

$$\frac{a - c}{a + c} < k < \frac{a + c}{a - c}\ (*).$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1195.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 264.)

Trouver les projections d'un triangle rectangle ABC, *connaissant les projections de la bissectrice* BD *qui est ligne de plus grande pente et sachant que* C *est dans le plan horizontal.* (Soons.)

Solution par MM. Emmerich, Werpin et Déprez. Désignons les projections de divers points sur le plan horizontal et vertical par les indices 1 et 2 respectivement, et soient E_1, F_1 les points de rencontre de BA et BD avec le plan horizontal. Le point F_2 étant à l'intersection de B_2D_2 et de la ligne de terre, le point F_1 est sur B_1D_1 et sur la perpendiculaire F_2F_1 à la ligne de terre. Par rabattement, on connaît aussi les vraies longueurs F_1B, F_1D.

Comme BF_1 est perpendiculaire à CE_1 et comme l'angle $CBF_1 = E_1BF_1$ le triangle BCE_1 est isoscèle. On distinguera maintenant les trois cas suivant que l'angle droit est en A, B ou C respectivement. Dans le second cas, on a $F_1C = F_1B$. Dans les deux autres cas, on conclut des triangles semblables CF_1D, BF_1C que $\overline{F_1C}^2 = F_1B.\ F_1D$ ce qui détermine également $F_1C = F_1E$. Mais CE_1 étant perpendiculaire à B_1F_1 on connaît ainsi les points C, E_1 ; A_1 est sur CD_1 et B_1E_1 ; C_2 se détermine par la perpendiculaire CC_2 à l'axe ; A_2 se trouve à l'intersection de C_2D_2 et de la perpendiculaire A_1A_2 à l'axe.

(*) M. Ploumen supposait $m'' > m'$ ou $k > 1$, en établissant la condition de possibilité du problème. (J. N.)

Digitized by Google

Question 1254.

Voir (*Mathesis*, (2), t. X, p. 32).

La somme des carrés des coefficients des différentes puissances de x dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m$$

est le coefficient de x^{km} (coefficient maximum) dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^{2m}.$$ (A. Boutin).

Solution par MM. Soons et Emmerich. Le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m$$

produit de m facteurs polynomes, peut s'obtenir en faisant, de toutes les manières possibles, un produit de m termes pris dans chacun des facteurs polynomes. Si l'on a obtenu un résultat x^r en prenant x^α dans le premier polynome, x^β dans le deuxième etc., en prenant dans le premier polynome $x^{k-\alpha}$, dans le deuxième $x^{k-\beta}$, et ainsi de suite, le second résultat sera x^{mk-r}.

Dans le développement total, les termes à égale distance des extrêmes ont donc le même coefficient. Comme la puissance $2m$ est le carré de la puissance m, le coefficient de x^{km} contient le carré du coefficient du milieu et les doubles produits des coefficients à égale distance des extrêmes, c.-à.-d. les sommes des carrés de ces coefficients.

Question 1260.

(Voir *Mathesis* (2), t. X, p. 56).

Etant donnée la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène l'ordonnée MP *d'un point quelconque de la courbe. Du pied* P *comme centre avec le rayon a on décrit une circonférence. On sait que la tangente en* M *à la chaînette touche cette circonférence. Quelle est l'enveloppe de la seconde tangente menée de* M *à la circonférence?*

(H. Brocard).

Plus généralement, en chaque point M *d'une courbe donnée* Σ *on mène la symétrique t' de la tangente t à* Σ *par rapport à l'ordonnée de* M; *cette droite enveloppe une nouvelle courbe* Σ'. *Comment construit-on le point de contact de t' avec* Σ'? (J. N.).

Digitized by Google

Solution par M. G. Gérard (Liége). Soient, dans la première partie de la question, (C) la chaînette donnée, MP, MT et MN respectivement l'ordonnée, la tangente et la normale, arrêtées à l'axe xx' de la courbe. Imaginons une parabole (π) ayant son foyer en M et touchant l'axe Ox au point N; si Q est le symétrique de M par rapport à l'axe xx', QT est la directrice et P appartient à la tangente au sommet; appelons $2p$ le paramètre de la parabole; les distances du point P aux droites MT, QT sont visiblement égales et comme elles ont pour valeurs respectivement a et $\frac{p}{2}$, on a constamment $p = 2a$. Ainsi, la grandeur de la parabole (π) ne dépend pas du point M que l'on considère et la chaînette (C) peut être engendrée par le foyer de cette parabole, roulant sans glisser(*) sur l'axe xx'.

Ce théorème, bien connu du reste, étant rappelé, soit MT′ la droite indiquée dans l'énoncé et dont on propose de chercher l'enveloppe. Il est visible, d'abord, que cette droite est parallèle à TQ et, si on la considère dans la parabole (π), c'est la parallèle menée par le foyer M à la directrice; elle est donc invariablement liée à la parabole et entraînée par celle-ci dans son mouvement. Comme le déplacement élémentaire de la figure est une rotation instantanée autour du point N, la droite MT′ touche son enveloppe au pied R de la perpendiculaire abaissée de N; puisque les droites MT′, TQ sont parallèles et que l'angle TQN, égal à TMN, est un angle droit, cette perpendiculaire n'est autre que la droite NQ; NQ est donc une normale commune aux courbes enveloppes des droites MT′, TQ. Or, on a constamment $RQ = p = 2a$, et le lieu de Q est évidemment la chaînette (C′), symétrique de (C) par rapport à l'axe xx'. On en conclut que l'enveloppe cherchée est une courbe parallèle à cette chaînette, à la distance $2a$.

Cas général. Soient, avec les notations indiquées, S et R les points de rencontre des couples de droites t et t_1, t' et t'_1 correspondant à deux points M et M_1 de la courbe Σ, ω le point d'intersection des normales en ces points.

Si l'on désigne par α et α_1 les inclinaisons respectives des tangentes t et t_1 sur l'axe des x, on a évidemment

$$\alpha - \alpha_1 = M\omega M_1 = MRM_1 ;$$

(*) La démonstration nous paraît présenter ici une lacune. (J. N.)

Digitized by Google

les deux circonférences $SM\omega M_1$ et MRM_1 sont donc symétriquement placées par rapport à la corde MM_1; si l'on passe à la limite, la première se trouve décrite sur le rayon de courbure $M\omega$ comme diamètre. On en conclut la construction cherchée : prendre le symétrique ω' du centre de courbure ω par rapport au point de la courbe M, et projeter ce point en R sur la droite t'.

Le point R peut encore être envisagé d'une autre manière. Les angles SMR, SM_1R ont leurs bissectrices parallèles aux axes coordonnés; par suite, les quatre points S, R, M et M_1 appartiennent à une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à ces axes et dont SR est un diamètre; cette hyperbole passe par l'orthocentre H du triangle MSM_1, lequel se trouve sur la circonférence MRM_1. Quand M_1 vient coïncider avec M sur la courbe Σ, le point H, qui est toujours sur la perpendiculaire abaissée de S sur la corde, arrive en ω'. On peut donc énoncer la propriété suivante : *si l'on construit l'hyperbole équilatère tangente en* M *à la courbe* Σ, *passant par* ω' *et ayant ses asymptotes parallèles aux axes, la droite* t' *touche son enveloppe sur cette hyperbole, au point diamétralement opposé à* M.

Solution par M. Fairon. 1° Soient X, Y les coordonnées courantes, et x, y celles d'un point M mobile sur une courbe donnée Σ. La symétrique t', par rapport à l'ordonnée MP, de la tangente t au point M de Σ a pour équation

$$Y - y = -y'(X - x). \tag{1}$$

Le point de contact de t' avec son enveloppe est défini par l'équation (1) et par la dérivée de cette équation par rapport à x, savoir :

$$-y' = -y''(X - x) + y',$$

d'où

$$X - x = \frac{2y'}{y''}. \tag{2}$$

Soient α l'angle de t avec l'axe Ox, R le rayon de courbure $M\omega$ au point M de Σ; nous aurons

$$\operatorname{tg}\alpha = y', \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y''\cos^3\alpha}.$$

La formule (2) pourra donc s'écrire

$$X - x = 2R\sin\alpha\cos^2\alpha\,(*), \text{ ou } \frac{X-x}{\cos\alpha} = R\sin 2\alpha. \tag{3}$$

(*) Nous modifions ici les conclusions que l'auteur tire de cette formule, pour en déduire l'élégante construction de M. Gérard. (J. N.)

Digitized by Google

Appelons M′ le point de contact de t' avec son enveloppe; alors $X - x$ est la projection de M′M sur Ox et, par suite, $\frac{X-x}{\cos\alpha}$ est égal à MM′. Si l'on prolonge ωM de $M\omega' = \omega M$, l'angle $M'M\omega' = \frac{1}{2}\pi - 2\alpha$; la relation (3) montre donc que M′ est la projection de ω′ sur t'.

Lorsqu'il s'agit de la chaînette, ω′ est le point de rencontre de la normale en M avec l'axe Ox.

2° Pour trouver l'équation de l'enveloppe de t', il suffit d'éliminer x et y entre les équations (1), (2) et

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{3}$$

Comme on a

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

les formules (1) et (2) prennent la forme

$$Y - y = -\frac{2y'^2}{y''} = -a\frac{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}, \tag{4}$$

$$X - x = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}; \tag{5}$$

si on remplace y par la valeur (3), on peut les considérer comme les équations paramétriques de la courbe, le paramètre étant x. D'ailleurs l'élimination de x entre (4) et (5) ne présente pas de difficulté.

Solution par M. V. Retali. 1° En chaque point M d'une courbe donnée Σ menons la droite t' conjuguée harmonique de la tangente t à Σ, par rapport aux droites MI, MJ qui vont à deux points fixes I, J et cherchons le point de contact de t' avec son enveloppe.

Si I, J sont les points circulaires du plan de la courbe donnée, le point de contact cherché est le centre de courbure de Σ en M; dans le cas général, il est donc le pôle de la droite IJ par rapport à la conique passant par les deux points I, J et ayant un contact du deuxième ordre avec Σ au point M. Lorsque I, J sont les points à l'infini des axes coordonnés rectangulaires, le point cherché est donc le centre de l'hyperbole équilatère ayant un contact du second ordre avec Σ en M et ayant ses asymptotes parallèles aux axes coordonnés.

Digitized by Google

2° Si $y = f(x)$ est l'équation de Σ, on trouve aisément que les coordonnées ξ, η du centre de l'hyperbole équilatère, correspondant au point (x, y) de Σ, sont

$$\xi = x + \frac{2\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \eta = y - \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et éliminant x et y entre ces deux équations et $y = f(x)$, on obtient celle du lieu cherché. Dans le cas particulier de la chaînette

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{y^2 - a^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2},$$

$$x = a \log \frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

et par conséquent

$$\xi = a \log \frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a} + \frac{2a}{y}\sqrt{y^2 - a^2}, \quad \eta = \frac{2a^2 - y^2}{y},$$

que l'on peut regarder comme équations paramétriques du lieu cherché. L'élimination de y, que l'on peut d'ailleurs faire sans peine, conduit à une équation assez compliquée.

Note. La considération de la parabole (π) n'est pas nécessaire pour établir la nature de l'enveloppe de la droite t' dans le cas de la chaînette. Q étant le symétrique de M par rapport à Ox, le lieu de Q est une chaînette (C'), tangente à QT et normale à QN. Or, t' est parallèle à QT, et la distance des droites TQ et t' est égale à $2a$. Donc t' enveloppe une courbe parallèle à la chaînette (C'); la normale à cette enveloppe étant QN, le point de contact de t' est sur QN, ou est la projection de N sur t'. (J. N.)

×Question 1281.

(Voir *Mathesis*, (2) t. X, p. 215.)

Soient J, J_a, J_b, J_c *les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle* ABC, *et* J', J''; J'_a, J''_a;... *les projections de ces points sur la base* BC *et sur la médiatrice de* BC. *Si la base* BC *est fixe et si l'angle opposé* A *est constant, les cercles* J'J''A, $J'_aJ''_a$A, *passent par un même point fixe; les cercles* $J'_bJ''_b$A, $J'_cJ''_c$A *passent par un second point fixe.* (J. Deprez.)

Digitized by Google

Solution par M. EMMERICH. Soient D, E les points de rencontre de AJ et BC, et de JJ′ et AJ'_a. En projetant le groupe harmonique A. D, J, J_a de J'_a sur JJ′ on voit que JJ′ = JE. Comme J′ et J'_a sont équidistants du milieu M de BC, le point J″ est situé sur AJ'_a. Si l'on projette les quatre points de J′ sur $J_aJ'_a$ on trouve que les points A, J′, J''_a sont en ligne droite.

Supposons que le cercle J′J″A coupe la médiatrice de BC en P. On a *angle* $APJ''_a = J''J'J''_a = AJ'_aJ''_a$, ce qui montre que les cercles J′J″A, $J'_aJ''_aA$ se coupent en P. Comme *angle* $J''J''_aJ' = J''J''_aJ'_a = J''AP =$ J″J′P, J′P touche le cercle $J''J''_aJ'$; d'où $\overline{PJ'}^2 = PJ''.\ PJ''_a = \overline{PF}^2 - \overline{J''F}^2$, F désignant le milieu de J″J''_a et de JJ_a. Mais $\overline{PJ'}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MJ'}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{JF}^2 - \overline{J''F}^2$; donc $\overline{PF}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{JF}^2 = \overline{BF}^2 =$ const. comme F est le milieu de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC. Le point P est fixe. Je dis que P est le milieu de MF′, si F′ désigne le second point de rencontre de la médiatrice et du cercle circonscrit au triangle ABC. Cela résulte de $\overline{PF}^2 - \overline{PM}^2 = MF(PF + PM)$, $\overline{BF}^2 = MF(PF + PF')$.

La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue. Après avoir fait voir que les droites $J'_bJ''_c$, $J'_cJ'_b$ passent par A on montre que les cercles $J'_bJ''_bA$, $J'_cJ''_cA$ se coupent en un point Q de la médiatrice de BC, et que ce point est le milieu de MF.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

968. Si p est un nombre premier, le seul carré entier dont la différence avec p soit un carré entier est $\frac{1}{4}(p+1)^2$. (*J. de Vuibert.*)

969. On a

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-x)(y-z)} + \frac{a-z}{z(z-x)(z-y)} = \frac{a}{xyz}.$$

(*J. de Vuibert.*)

970. On fait tourner une ellipse autour de l'un de ses foyers; dans chacune de ces positions on lui mène une tangente parallèle à une direction donnée. Trouver en coordonnées polaires le lieu du point de contact (*Examen oral à l'École Polytechnique de Paris*, 1898).

Prenons pour pôle le foyer F fixe et pour axe polaire la parallèle Fx menée par F à la direction donnée. Soient M le point de contact d'une tangente parallèle à Fx, P et P′ les projections des foyers F et F′ sur cette tangente.

Digitized by Google

Posons $MF = r$, $MF' = r'$ *angle* $MFx = \theta = PMF' = P'MF'$. On sait que $PF.P'F' = b^2$. Or $PF = r\sin\theta$, $PF' = r'\sin\theta$. Donc $rr'\sin^2\theta = b^2$, et comme $r + r' = 2a$, $r' = 2a - r$, l'équation polaire du lieu est donc $r(2a - r)\sin\theta = b^2$. L'équation cartésienne de la courbe est du sixième degré.

(E. N. Barisien.)

971. Soient pq, $p'q'$ deux cordes variables d'un même cercle. On suppose que pq passe par un point fixe a, et que les droites pp', qq' sont parallèles à une même droite donnée. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur $p'q'$.

(*Ecole normale de Fontenay-aux-Roses*).

Soit AB le diamètre du cercle donné, perpendiculaire à la dixection pp'; ce diamètre est fixe. Les cordes pq, $p'q'$ étant symétriques par rapport à AB, $p'q'$ passe par le symétrique a' de a par rapport à AB. Le lieu demandé est donc la circonférence décrite sur aa' comme d amètre.

972. Construire un triangle ABC, connaissant le côté $BC = a$, la somme m des longueurs des médianes issues des sommets B et C, et une hauteur h. (*École normale de Saint-Cloud.*)

1° Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Si l'on connaît la hauteur issue de A, on placera le côté BC; après avoir mené une parallèle à BC à la distance $\frac{1}{3}h$, on cherchera sur cette parallèle un point G dont la somme des distances aux points B et $C = \frac{2}{3}m$.

2° Si h est la hauteur issue de C, la parallèle à AB par G rencontre BC en un point I qui résulte de $BI = \frac{1}{3}BC$; comme sa distance à $AB = \frac{h}{3}$, la droite GI s'obtient en menant par I une tangente au cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{3}h$. Il reste à trouver sur cette droite le point dont la somme des distances aux points B et $C = \frac{2}{3}m$.

973. n étant un nombre entier, trouver : 1° pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{n+8}{2n-5}$ est un nombre entier; 2° pour quelles valeurs de n cette fraction est irréductible; 3° si la fraction n'est pas irréductible, quels peuvent être les facteurs communs aux deux termes de la fraction. (*Ecole normale de Saint-Cloud*).

1° $2n - 5$ étant impair, il suffit d'examiner la fraction

$$\frac{2n+16}{2n-5} = 1 + \frac{21}{2n-5}.$$

Digitized by Google

Pour que cette expression soit entière, il faut que $2n-5$ soit égal à l'un des nombres 1, 3, 7, 21, ou n égal à 3, 4, 6, 13.

2° et 3°. Les facteurs communs à $2n+16$ et $2n-5$ sont communs à leur différence 21; donc les seuls facteurs communs à $n+8$ et $2n-5$ peuvent être 3 et 7. Pour que la fraction proposée soit irréductible, il faut et il suffit que $n+8$ soit premier avec 21; on pourrait encore dire que $n+2$ ne doit pas être divisible par 3 ni $n+1$ par 7.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1293. Soient A un point quelconque d'une ellipse, B et C les pieds des deux autres normales abaissées du centre de courbure relatif à A, D un des points de l'ellipse, conjugués de A. Montrer que la distance du centre de l'ellipse à la normale en D est dans un rapport constant avec la distance du point A à la droite BC. (E. N. Barisien.)

×**1294.** Chercher quelques propriétés particulières du triangle ABC dont la médiane issue de A est moyenne proportionnelle entre les côtés AB et AC. (J. N.)

×**1295.** Résoudre par des formules sans dénominateurs les équations

$$\frac{y}{x-1}=\frac{b-b'}{a-a'}=\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{x+1}{y},$$

où l'on a

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2=1.$$ (G. Fontené.)

1296. On a, dans un sac, nk boules formant n séries numérotées de 1 à k; on distribue au hasard, k boules à chacune de n personnes; quelle est la probabilité pour que chacune des n personnes ait en mains la série complète des k numéros? (A. Boutin).

Rectifications. Page 230, lire ligne 13 en remontant $(\Sigma A\alpha)^2$; l. 7 en rem., $\Sigma a^2(b'^2c''^2-b''^2c'^2)=\Delta_1$; l. 5 et 6 en rem., $A'\alpha''+A''\alpha'=$; l. 3 en rem., $A'\alpha''$.

Digitized by Google

FORMULE DE STIRLING.

Des inégalités logarithmiques démontrées antérieurement (*Mathesis*, pp. 222-224) et de la formule de Wallis, on déduit la formule de Stirling (1696-1770) :

$$1.2.3...n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \quad 0<\theta<1$$

par un procédé dû à GLAISHER (*Quarterly Journal of Mathematics*, 1877, XV, pp. 57-63) et à CAYLEY (Ib., pp. 63-64), exposé par nous avec plus de rigueur (N. C. M., 1879, V, pp. 44-51), simplifié par E. CESÀRO (Ib., 1880. VI, pp. 354-357, *Algebra*, 1894, pp. 270-271) et par ROUCHÉ (C. R., 1890, CX, pp. 513-515).

1. *Formule de Stirling, la constante n'étant pas déterminée.* Posons

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3...n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n, \quad \varphi(n+1) = \frac{1.2.3...(n+1)}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}} e^{n+1}, \quad \varphi(n+2) = \text{etc.}$$

On trouve immédiatement

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

et, en prenant les logarithmes népériens,

$$\log\varphi(n) - \log\varphi(n+1) = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Des inégalités logarithmiques

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

on déduit

$$0 < -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Par suite, on a, d'après (1),

$$\log\varphi(n) - \log\varphi(n+1) > 0, \quad (2)$$

$$\log\varphi(n) - \log\varphi(n+1) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$\log \varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log \varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)}. \qquad (3)$$

En passant des logarithmes aux nombres, les inégalités (2) et (3) deviennent

$$\varphi(n) > \varphi(n+1),$$

$$\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+1) e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

La fonction $\varphi(n)$, qui est positive et décroissante, pour n indéfiniment croissant, tend vers une limite C, inférieure à $\varphi(n)$.

La fonction $\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}}$, qui est positive et croissante, pour n indéfiniment croissant tend vers la même limite C, supérieure d'ailleurs à $\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}}$. On a donc

$$\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}} < C < \varphi(n),$$

ou

$$C < \varphi(n) < C e^{\frac{1}{12n}}.$$

Donc enfin, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\frac{1.2.3...n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n = \varphi(n) = C e^{\frac{\theta}{12n}},$$

$$1.2.3...n = C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}. \qquad (4)$$

2. *Détermination de la constante.* En changeant n en $2n$, dans la formule (4), il vient

$$1.2.3...2n = C(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\frac{\theta'}{24n}},$$

θ' étant encore compris entre 0 et 1. Divisant par cette dernière relation la relation (4) dont les deux membres ont été élevés au carré, il vient

$$\frac{(1.2.3...n)^2}{1.2.3...(2n)} = C \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}\sqrt{2}} e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}.$$

On tire de là

$$C = \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n-1)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} e^{\frac{\theta'-4\theta}{24n}},$$

$$C^2 = \frac{2.2.4.4...2n.2n}{1.3.3.5...(2n-1).2n} \cdot 4e^{\frac{\theta'-4\theta}{12n}}.$$

Digitized by Google

Faisant croître n indéfiniment, on trouve à la limite, d'après la formule de Wallis,

$$C^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi, \quad C = \sqrt{2\pi}.$$

On a donc enfin

$$1.2.3.... n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

comme nous l'avions annoncé. (P. M.).

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**17**. *Paradoxe mathématique*. Si l'on élimine θ entre les deux équations

$$y = (x - a) \operatorname{tg} \theta, \quad y = -(x - a) \cot \theta, \tag{1}$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$y^2 + (x - a)^2 = 0. \tag{2}$$

Mais si l'on écrit les équations (1) ainsi :

$$x \sin \theta - y \cos \theta = a \sin \theta, \quad x \cos \theta + y \sin \theta = a \cos \theta, \tag{3}$$

et qu'on en fasse la somme des carrés, on obtient

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{4}$$

Expliquer le paradoxe. (E. N. Barisien.)

Les équations (1) représentent, lorsque θ varie, deux droites rectangulaires mobiles autour du point $(a, 0)$. Si l'on reste dans le domaine réel, le lieu de l'intersection de ces droites se réduit au point $(a, 0)$. Mais chacune des droites isotropes (de coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$) menées par le point $(a, 0)$ étant perpendiculaire à elle-même, on peut aussi dire que le lieu considéré se compose de l'ensemble de ces droites, représenté par l'équation (2).

Si l'on élève les équations (3) au carré et qu'on les ajoute ensuite membre à membre, on combine deux droites parallèles m et n, menées par les points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, avec deux droites m' et n' menées par les mêmes points dans des directions respectivement perpendiculaires aux droites m et n. Les droites m et n', de même que les droites n et m', se coupent sur le cercle (4). (J. N.)

18. *Sur les triangles trihomologiques*. A l'égard de l'article de M. Ripert sur les triangles trihomologiques (*Mathesis*, (2) X, p. 226), je remarque que tous les centres d'homologie, appartenant à un groupe de triangles trihomologiques deux à deux, inscrits à une même conique,

Digitized by Google

sont situés sur une même droite, et que les tangentes à la conique menées par les sommets de chaque triangle du groupe coupent les côtés opposés sur cette droite.

Il est évident que les centres d'homologie S_1, S_2, S_3 de deux triangles trihomologiques $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ forment un triangle trihomologique à $A_1A_2A_3$, les centres d'homologie étant B_1, B_2, B_3, et aussi à $B_1B_2B_3$, les centres étant A_1, A_2, A_3. Quand les triangles A et B sont inscrits à une même conique O, M. Ripert a trouvé que les coordonnées de S_1, S_2, S_3 par rapport à A sont

$$S_1\,(\alpha_1\lambda_1,\ \alpha_2\lambda_3,\ \alpha_3\lambda_2),\quad S_2\,(\alpha_1\lambda_3,\ \alpha_2\lambda_2,\ \alpha_3\lambda_1),\quad S_3\,(\alpha_1\lambda_2,\ \alpha_2\lambda_1,\ \alpha_3\lambda_3),$$

avec la condition $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. On déduit de là facilement au moyen de ces coordonnées que S_1, S_2, S_3 se trouvent sur une droite. En se servant du théorème B de mon article (*Mathesis* (2) X, p. 154) et en remplaçant A, B, C, S_1, S_2, S_3, A', B', C', Σ de ce théorème par A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, S_1, S_2, S_3, O respectivement, on voit que les tangentes à O menées par les sommets de A et de B coupent les côtés opposés sur la droite $S_1S_2S_3$. Cette droite est évidemment la même pour tout couple du groupe de triangles inscrits à O, trihomologiques deux à deux, dont A et B font partie. (J. A. Third.)

Autrement. Les couples A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 appartiennent à une involution (S_1) sur la conique. Dans cette involution, aux éléments doubles α_1, α_2 de la projectivité cyclique $(A_1A_2A_3)$ correspondent les éléments doubles β_1, β_2 de la projectivité cyclique $(B_1B_2B_3)$. Les sens correspondants $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ permettent de distinguer les couples de points conjugués $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, de l'involution (S_1). De même, les couples A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 appartiennent à l'involution (S_2) sur la conique et les couples $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ sont conjugués dans cette involution, car les sens $B_2B_3B_1$ et $B_1B_2B_3$ sont identiques. Les involutions (S_1) et (S_2) étant distinctes, les couples $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ sont identiques; par suite, $\alpha_1\equiv\beta_2$, $\beta_1\equiv\alpha_2$. Ainsi les ternes $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ appartiennent à une même projectivité cyclique dont les éléments doubles α_1, α_2 sont situés sur la droite S_1S_2. Ce qui démontre le théorème de M. Third.

Dans la projectivité $(A_1B_3,\ A_2B_1,\ A_3B_2)$ les éléments imaginaires conjugués α_1, α_2 sont correspondants; par suite, les ponctuelles sont involutives et les droites A_1B_2, A_2B_1, A_3B_2 concourent en un point S_3 de la droite $\alpha_1\alpha_2$ ou S_1S_2. Ainsi les points S_1, S_2, S_3 sont en ligne droite. (Servais.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 760.

(Voir *Mathesis* (2) II, 80 et 125.)

I. *La série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad \text{où} \quad \sqrt[n]{u_n} = 1 - k(\log n : n)$$

est convergente si k est supérieur à 1, *divergente si k est inférieur ou égal à* 1 (*Les logarithmes sont supposés népériens*).

II. *Si α_n tend vers zéro avec* $(1 : n)$, *la série*

$$\Sigma (1 - \alpha_n)^n,$$

sera convergente si le rapport $(n\,\alpha_n : \log n)$ *tend vers une limite supérieure à* 1, *quand n est de plus en plus grand, divergente si ce rapport tend vers une limite inférieure à* 1, *ou s'il tend vers l'unité, en lui restant sans cesse inférieur.* (V. Jamet.)

Seconde solution par M. A. G. Joachimescu. Remarquons d'abord que les deux questions peuvent être ramenées à une seule. En effet, soit

$$k(\log n : n) = \alpha_n.$$

α_n tend vers zéro avec $(1 : n)$, car

$$\lim \alpha_n = \lim \frac{k \log n}{n} = 0.$$

Donc

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \alpha_n \quad \Sigma u_n = \Sigma (1 - \alpha_n)^n.$$

Pour prouver la convergence ou la divergence de cette dernière série, observons qu'on a :

$$(1) \qquad (1 - \alpha_n)^n = \left[(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}, \quad \lim (1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{e}.$$

Donc nous pouvons écrire

$$(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{e} + \varepsilon.$$

Par suite, ε tendant vers zéro avec α_n ou $(1 : n)$, la relation (1) devient

$$(1 - \alpha_n)^n = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{n\alpha_n}.$$

Digitized by Google

Posons, η étant nulle ou ayant une limite nulle avec $(1 : n)$,

$$n\alpha_n = k \log n + \eta.$$

Alors,

$$(1 - \alpha_n)^n = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{k \log n} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{\eta},$$

$$\Sigma (1 - \alpha_n)^n = \Sigma \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{k \log n} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{\eta}. \qquad (2)$$

Comparons entre elles les séries :

$$(3) \qquad \Sigma \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{k \log n}, \quad \Sigma \frac{1}{n^k} = \Sigma \left(\frac{1}{e}\right)^{k \log n}. \qquad (4)$$

On a

$$\lim \left(\frac{\frac{1}{e} + \varepsilon}{\frac{1}{e}} \right)^{k \log n} = \lim (1 + e\varepsilon)^{k \log n} = \lim \left[(1 + e\varepsilon)^{\frac{1}{e\varepsilon}} \right]^{ke\varepsilon \log n} = \lim e^{ke\varepsilon \log n}.$$

Or

$$e^{ke\varepsilon \log n} = n^{ke\varepsilon} = n^{k\left[e(1-\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1\right]} = \left[\frac{n^{e(1-\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}}}{n} \right]^k.$$

Comme $(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$ a pour limite $\frac{1}{e}$, on a

$$\lim e^{ke\varepsilon \log n} = 1.$$

Les deux séries (3), (4) sont en même temps convergentes ou divergentes; il en est de même, d'après un théorème bien connu, de la série (2) car le facteur $\left(\frac{1}{e} + \eta\right)^{\eta}$ a toujours une valeur finie et pour $n = \infty$ tend vers 1.

Bucharest, 13 avril 1892.

Notes. I. Les séries qui ont respectivement pour termes généraux

$$\frac{1}{n^k}, \left(1 - k\frac{\log n}{n}\right)^n$$

sont convergentes et divergentes ensemble, car le rapport r de ces

Digitized by Google

termes généraux, $n^k\left(1-k\frac{\log n}{n}\right)^n$, tend vers l'unité En effet, on a

$$\log r = k\log n + n\log\left(1-k\frac{\log n}{n}\right) =$$

$$k\log n + n\left[-k\frac{\log n}{n} - \frac{k^2(\log n)^2}{n^2} - \text{etc.}\right]$$

$$= -k^2\frac{(\log n)^2}{n} - \text{etc.}$$

expression qui a pour limite 0. (V. JAMET).

II. La solution de la question 760, due à M. E. Cesàro (*Mathesis*, 1892, p. 125), se trouve aussi dans son remarquable *Corso di Analisi algebrica* (Torino, Bocca, 1894) pp. 489-491.

×Question 1248.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 280.)

Trouver le maximum de l'expression $\sin 2x \sin 2y$, *sachant que* $\sin y = m \sin x$. (A. C.)

Solution par M. SOONS. Posons $\mu = \sin 2x \sin 2y$; nous aurons

$$\mu^2 = 16m^2(\sin^2 x)^2(1-\sin^2 x)(1-m^2\sin^2 x).$$

Le maximum de μ^2 a lieu en même temps que celui de la quantité

$$\frac{\sin^2 x}{\alpha}\cdot\frac{\sin^2 x}{\alpha}\cdot\frac{1-\sin^2 x}{\beta}\cdot\frac{1-m^2\sin^2 x}{\gamma}. \qquad (1)$$

Il suffit maintenant de choisir les indéterminées α, β, γ de manière que la somme des facteurs du produit (1) soit constante et que ces facteurs soient égaux entre eux ; ce qui donne

$$\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{m^2}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{\alpha} = \frac{1-\sin^2 x}{\beta} = \frac{1-m^2\sin^2 x}{\gamma}.$$

De là on déduit

$$\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\sin^2 x} - \frac{m^2}{1-m^2\sin^2 x} = 0,$$

ou $$4m^2\sin^4 x - 3(m^2+1)\sin^2 x + 2 = 0. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Cette équation donne

$$\sin^2 x = \frac{3(m^2+1) \pm \sqrt{9m^4 - 14m^2 + 9}}{8m^2}. \qquad (3)$$

Appelons α et β ces deux valeurs de $\sin^2 x$. La quantité sous le radical, égale à $9(m^2-1)^2 + 4m^2$, est toujours positive; de plus, des signes de $\alpha+\beta$ et de $\alpha\beta$ on conclut que $\sin^2 x$ a deux valeurs positives.

L'hypothèse $m^2 = 1$ se discute immédiatement. Nous supposons $m^2 < 1$; s'il en était autrement on exprimerait μ^2 en fonction de $\sin^2 y$ après avoir posé $\sin x = m' \sin y$ où $m' = 1 : m$. Le premier membre de l'équation (2) prenant une valeur positive pour $\sin^2 x = 0$ et la valeur négative $m^2 - 1$ pour $\sin^2 x = 1$, l'équation a une racine comprise entre 0 et 1, et une autre supérieure à 1. Il résulte de là que le maximum de μ^2 a lieu pour $\sin^2 x = \beta$.

Dans la solution qui précède, $\sin^2 x$ est la variable et μ^2 la fonction; la discussion devient plus compliquée si l'on prend x pour variable indépendante et μ pour la fonction.

M. Barisien a résolu la même question en égalant à zéro la dérivée de

$$\mu = 4m \sin^2 x \cos x \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}.$$

×Question 1272.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 132.)

Un triangle indéterminé ABC *a son sommet* A *sur une circonférence* (A), *son sommet* B *sur une autre circonférence* (B), *et son sommet* C *sur une troisième circonférence* (C). *Trouver la courbe ou les courbes qui limitent les régions du plan où se trouve le barycentre* G *d'un de ces triangles.*

Question analogue pour le barycentre d'un tétraèdre indéterminé dont les sommets appartiennent à quatre sphères données. (E. Lemoine).

Solution par MM. H. Brocard et Ripert. Soient O_a, O_b, O_c, les centres, et a, b, c les rayons des trois cercles donnés (A), (B), (C).

Supposons d'abord le point A fixe. Le lieu du milieu M de AB sera un cercle (B') de rayon $\frac{b}{2}$.

Si maintenant on suppose qu'à son tour le point A décrive le cercle (A), les centres des cercles (B') de rayon constant égal à $\frac{b}{2}$ se déplaceront sur

Digitized by Google

une circonférence (A') de rayon $\frac{a}{2}$, O_b étant le centre d'homothétie.

Donc la région des points M est un cercle (M) de rayon $\frac{a+b}{2}$, dont le centre est au milieu de O_aO_b.

Le barycentre G est au tiers des droites telles que MC. Si l'on suppose C fixe, on a pour lieu de G un cercle de rayon $\frac{2}{3}\cdot\frac{a+b}{2}$ ou $\frac{a+b}{3}$. Mais si l'on fait décrire au point C le cercle (C), on voit qu'à son tour le barycentre G se trouvera dans un cercle limite, enveloppe d'un cercle de rayon $\frac{c}{3}$ dont le centre décrit le cercle de rayon $\frac{a+b}{3}$. Par conséquent, le cercle-enveloppe a pour rayon $\frac{a+b+c}{3}$ et l'on voit, en outre, que son centre est le barycentre du triangle $O_aO_bO_c$ des centres des trois cercles donnés.

Note. Par analogie, l'extension au tétraèdre n'offre aucune difficulté, et fait prévoir pour résultat une sphère à la place d'un cercle.

Autre solution. Soit ω le barycentre du triangle $O_aO_bO_c$. Pour passer de ω à G, il suffit de construire une ligne brisée ωDEG dont les côtés ωD, DE, EG sont parallèles aux rayons O_aA, O_bB, O_cC et égaux à $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$. La distance ωG est donc en général plus petite que $\frac{1}{3}(a+b+c)$; elle atteint cette valeur lorsque les rayons O_aA, O_bB, O_cC sont parallèles et de même sens. On en conclut que la région des points G est limitée par la circonférence $\left(\omega, \frac{a+b+c}{3}\right)$.

Si l'on peut former un triangle $\alpha\beta\gamma$ avec les rayons a, b, c, la distance ωG peut devenir nulle; il suffit pour cela que les rayons O_aA, O_bB, O_cC fassent des angles égaux avec les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ ou qu'ils aient des directions symétriques de ces droites par rapport à une droite quelconque.

Supposons $a = b + c$. Alors le point G coïncide encore avec ω lorsque les rayons O_aA, O_bB, O_cC sont parallèles entre eux, les deux derniers étant dirigés en sens contraire du premier.

Ainsi, quand on a $a < b + c$ ou $= b + c$, le point G peut occuper une position quelconque à l'intérieur de la circonférence limite $\left(\omega, \frac{a+b+c}{3}\right)$.

Digitized by Google

Considérons maintenant le cas où $a > b + c$. Prenons sur Dω la longueur $DI = \frac{1}{3}(b + c)$; de

$$\omega D < DE + EG + G\omega, \quad \text{ou} \quad \omega D - DE - EG < G\omega,$$

on conclut $\omega I < \omega G$. Par suite, la circonférence $\left(\omega, \frac{a - b - c}{3}\right)$ constitue une seconde limite des points G : aucun de ces points ne peut tomber à l'intérieur de la circonférence. (J. N.).

×Question 1292.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 250.)

Dans un triangle sphérique ABC, *rectangle en* A, *on porte sur* AC *l'arc* AD *égal au complément de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle* B, *et du point* D *comme pôle, on décrit l'arc de petit cercle* BE *rencontrant le prolongement de* DA *en* E; *l'arc* AE *mesure la surface du triangle proposé.* (C. E. W.)

Solution par M. E. Pire, *étudiant à l'École des arts et manufactures.*

La surface du triangle sphérique rectangle ABC est égale à B + C — 1^{dr} — ou bien à C — (1^{dr} — B) ou encore à C — AD.

La question revient donc à prouver que

$$C - AD = AE \text{ ou } C = BD.$$

Or dans le triangle rectangle ABD, on a :

$$\cos AD = \sin B \frac{\cos BD}{\cos AB},$$

et dans le triangle ABC, on a également

$$\sin B = \frac{\cos C}{\cos AB}.$$

De ces deux égalités il résulte que

$$\cos BD = \cos C$$

et par suite, que BD = C.

Solution analogue par M. Déprez.

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

274. Le produit des rayons des trois cercles qui passent par deux sommets d'un triangle ABC et par un même point de BROCARD est égal au cube du rayon du cercle ABC. (E. N. BARISIEN.)

275. Le produit des rayons des deux cercles qui passent par A et touchent BC, l'un en B, l'autre en C, est égal au carré du rayon du cercle ABC. (E. N. BARISIEN.)

276. a, b, c, d, étant quatre nombres inégaux, trouver la condition nécessaire pour que les équations

$$x + ay + a^2z + a^4 = 0, \quad x + by + b^2z + b^4 = 0,$$
$$x + cy + c^2z + c^4 = 0, \quad x + dy + d^2z + d^4 = 0$$

soient compatibles.

Réponse : $a + b + c + d = 0$.

277. Exprimer que les équations

$$x\sqrt{3} - y = a, \quad x + y\sqrt{3} = b, \quad x^2 + y^2 = c^2$$

sont compatibles.

278. Dans tout triangle ABC, on a

$$4b^2 + a^2 - 4ab\cos C = 4c^2 + a^2 - 4ac\cos B = b^2 + c^2 + 2bc\cos C.$$

On obtient ces relations en prolongeant CA de AD = CA, et BA de AE = BA, et en calculant BD^2 dans les triangles CBD, EBD et ABD.

(E. N. BARISIEN.)

279. Résoudre le système

$$\frac{x + x^2}{y + y^2} = a, \quad \frac{x + y^2}{x^2 + y} = b.$$

Ce système donne

$$\frac{x + y + x^2 + y^2}{x - y + x^2 - y^2} = \frac{a + 1}{a - 1}, \quad \frac{x + y + x^2 + y^2}{x - y - (x^2 - y^2)} = \frac{b + 1}{b - 1},$$

d'où, par division,

$$\frac{1 - x - y}{1 + x + y} = \frac{(a + 1)(b - 1)}{(a - 1)(b + 1)}$$

Digitized by Google

ou $$\frac{2}{x+y}=\frac{(a+1)(b-1)+(a-1)(b+1)}{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}=\frac{ab-1}{a-b};$$ etc.

1280. On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy, un point fixe A sur Oy et deux points variables B et C sur Ox, tels que $OB \times OC =$ constante. Le lieu des points de rencontre de la médiane AM du triangle ABC avec le cercle des neuf points de ce triangle se compose de la droite Ox et d'un cercle. (E. N. Barisien.)

Si l'on fait $OA = k$, OB, $OC = k^2$, on trouve

$$2k(x^2+y^2)-(3k^2-k^2)y+k(k^2-k^2)=0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1297. On donne dans un même plan deux droites AB, A'B'. Soient M, M' deux points mobiles sur ces droites sous la condition

$$MA.MB = M'A'.M'B';$$

quelle est l'enveloppe de la droite MM'? Trouver géométriquement le point de contact de MM' avec l'enveloppe. (J. Neuberg.)

1298. Si M est un point mobile sur une ellipse de foyers F, F', démontrer que les points de contact des côtés MF, MF' avec le cercle inscrit au triangle MFF' et avec le cercle exinscrit dans l'angle M décrivent des conchoïdes d'ellipse; les points de contact des mêmes côtés avec les deux autres cercles exinscrits décrivent des circonférences. (J. Déprez.)

1299. Construire une hyperbole équilatère, connaissant un point ou une tangente, un sommet et la tangente en ce sommet.

×**1300.** Résoudre le système d'équations

$$x^2+y^2=1, \qquad k^2x^2+z^2=1,$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ a & b-1 & c-1 \\ a' & b'-1 & c'-1 \end{vmatrix} = 0,$$

en écartant la solution évidente $x=0$, $y=1$, $z=1$ et les deux solutions $(x=a, y=b, z=c)$, $(x=a', y=b', z=c')$ que l'on suppose exister; on admettra d'ailleurs que $1-k^2a^2a'^2$ est différent de zéro.

(G. Fontené.)

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Questions de théorie des nombres; par S. Realis. 177
×Questions 1234; solutions par MM. Déprez et Emmerich 164

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Sur une réussite; par M. Stuyvaert. 13
×Substitutions monocycliques (J. N.) 14
×Formules combinatoires; par M. Stuyvaert 15
Notre supplément (J. N.). 150
Sur les permutations carrées de base 6; par M. G. Tarry. Supplément, pp. 23-30
×Sur une formule combinatoire (P. M.) Solution de la question 1203. . . 159
×Question d'algèbre du concours général de 1900; solution par M. Ploumen. 220
×Combinaisons; par M. Stuyvaert 224
Théorème de l'addition des fonctions hyperboliques; par M. G. Fontené. . 241
Paradoxe mathématique; par MM. Barisien et J. Neuberg 267
×Question 889; solutions par MM. Emmerich, Gillet, etc. 19
×Question 1198; solution par M. Barisien 27
×Question 1219; solution par M. Goldenberg 49
×Sur la représentation proportionnelle; par M. J. Wasteels 81
×Problème de maximum et de minimum (*J. de Vuibert*) 86
×Question 1241; solutions par Mlle Wendt, Listray, etc. 100
×Question 1221; solution par MM. Rose, Delahaye, etc. 121
Questions 1215 et 1231; solutions par MM. Emmerich et Gob 199
×Question 1139; solution par M. Emmerich 229
Question 1254; solution par MM. Soons et Emmerich 257
Question 1248; solution par M. Soons 271

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. MÉTAGÉOMÉTRIE.

Une application de la théorie de l'inversion; par M. Orlando 17
Aire d'un quadrilatère; par MM. J. Neuberg et Droz-Farny 43, 225
Sur le quadrilatère inscriptible (A. C.) 87
Sur l'hexagone de Pascal, d'après L. Gérard 88
Sur le triangle pseudo-isoscèle; par M. A. Emmerich 129
Propriétés d'un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, par M. C. Couturier 135
Problème par M. E. N. Barisien. 136
Division d'un angle en n parties égales. 156
Sur la composition des forces; par M. C. Wasteels 220

(*) Rectifications, pp. 104, 128, 152. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Digitized by Google

Pages.
Centre de gravité d'un trapèze; par M. Philippin. 249
Question 1230; solutions par MM. Emmerich, Déprez, etc. 74
Question 1236; solution par M. Déprez. 77
Question 1242; solution par M Emmerich 101
Question 1243; solution par M. G. Gérard. 123
Question 1224; solutions par MM. Barisien, Clavero y Guervos 28
Question 1217; solution par M. J. Déprez 48
Question 1237; solutions par MM. Emmerich et J Neuberg 49
Question 1050; solution par M. Fairon. 142
Question 1071; solutions par MM. Droz-Farny et Déprez 142
Question 1258; solutions par MM. Rose, Emmerich, etc. 150
Question 1253; solutions par MM. Soons et Emmerich 171
Question 1256; solution par MM. Soons, Emmerich, etc. 173
Question 1238; solution par M. Neuberg 202
Question 1268; solution par M. Verniory 211
Question 1250; solution par M. J. Déprez 236
Question 1277; solution par MM. François, Plakhovo, etc. 238
Question 1195; solution par MM. Emmerich, Werpin, etc. 256
Question 1281; solution par M. Emmerich 261
Question 1272; solution par MM. Brocard et Ripert 272
Question 1292; solution par M. E. Pire. 274

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Question de géométrie analytique posée au concours général de 1899; solution géométrique par M. Gob; note historique par M. Neuberg. . 17, 195
Sur trois hyperboles associées à un triangle; par M. Droz-Farny 11
Sur trois paraboles associées à un triangle; par M. Droz-Farny 63
Sur le théorème de Maclaurin et Braikenridge; par M. Pirondini 64
Note de géométrie; par M. Gob 65
Sur les triangles inscrits à une ellipse et circonscrits à un cercle concentrique; par M. E. Barisien 84, 113, 136
Sur le point de Fagnano; par M. Andrien 105
Sur les triangles trihomologiques; par MM. J.-A. Third, Ripert et Servais 153, 227, 267
Théorème de l'addition des fonctions hyperboliques; par M. G. Fontené. . 241
Question 1166; solution par M. Emmerich 26
Question 1245; solution par M Emmerich 52
Question 1069; solutions par MM. Colart, Retali, etc. 73
Question 1075; solution par MM. Déprez, Soons, etc.. 91
Question 1098; solution par M. Barisien 118
Sur la question 1222, par M. Neuberg 134
Question 1002; solution par M. V. Retali 141
Question 1092; solution par M. V. Cristesco 144
Question 1216; solution par M. Soons 149
Question 1085; solution par M. Mandart 163
Question 1251; solutions par MM. Couturier, Déprez, etc. 168, 225
Questions de géométrie analytique du concours général de 1900; solutions par MM. Ploumen et Klompers 217, 254
Question 1173; solution par M. Droz Farny 231
Question 1266; solution par M. H. Descans. 237

Digitized by Google

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Pages.

Sur la développante de cercle et la spirale logarithmique; par L. Orlando . 110
Le théorème de Chasles relatif aux cubiques gauches; par M. Stuyvaert . 181
Sur les astéroïdes ou astroïdes; par MM. G. Loria et J. Neuberg 244
Question 939; par M. J. Neuberg 21
Question 1096; solutions par MM. Hacken, Jerabek 23
Question 785; solution par MM. Emmerich, Neuberg, Espanet . . . 44, 90
Question 1066; solution par MM. Droz-Farny, Barisien, etc. 71
Question 1150; solution pur M. Droz-Farny 92
Question 1235; solutions par MM. Cordoso-Laynes, Gob 96
Question 1214 (ou 1234); solution par M. V. Retali 121
Question 1249; solutions par MM. G. Gérard et E. N. Barisien 166
Question 1259; solution par M. V. Retali 208
Question 1183; solution par M. J. Neuberg 231
Question 1197; solution par M. Emmerich. 232
Question 1239; solution par M. J. Deprez 234
Question 1260; solutions par MM. Gérard, Fairon, etc. 257

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque; par M. E. Cesáro 5, 37, 57
Aire des sinusoïdes et formules de Wallis (P. M.) 183
Inégalités logarithmiques et formule de Stirling (P. M.) 223, 265
Question 784; solution par M. J. Neuberg 69
Question 387 (2e partie), solution par M. Emmerich. 116
Question 760; solution par M. Joachimescu 269

BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE; PUBLICATIONS RÉCENTES; VARIÉTÉS.

W. W. Beman and D. E. Smith. Geometry 66
M. Schuster. Geometrische Aufgaben 67
S. Pincherle. Geometria metrica e Trigonometria 67
C. Alasia. Geometria e Trigonometria della sfera 67
I. Ghersi. Metodi per risolvere i problemi di Geometria 67
Esquisses biographiques. Tchebychef, Brioschi, Lie (P. M.). . . . 67, 112, 228
Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften (P. M.) . . . 83, 193, 252
E. Duporcq. Principes de géométrie moderne (J. N) 89
M. Cantor. Geschichte der Mathematik, B. II, Hb 2. (P.M.) 139
Cantor's Festschrift. (P. M.). 139
Formules de la théorie des fonctions elliptiques (P. M.). 140
Rebière. Pages choisies des savants modernes (J N.). 141
Ganter und Rudio. Analytische Geometrie (J.N) 161
R. Sturm. Darstellende Geometrie (J. N.). 161
J. Boyer. Histoire des mathématiques (P. M.) 162
E. Lebon. Histoire de l'astronomie (P. M.) 162
J. Thirion. L'astronomie chez les Grecs (P. M.) 162
E. Gelin. Précis d'arithmétique élémentaire (P. M.). 188
B. Niewenglowski et L. Gérard. Cours de Géométrie élémentaire (J. N). 189

Digitized by Google

Pages.
Ed. v. Weber. Das Pfaff'sche Problem, etc. 194
O. Hölder. Anschauung und Denken in der Geometrie. 194
R. Fricke. Vorlesungen über höh. Mathematik 194
P. Amodeo. Aritmetica (d'après O. Tedone) 250
Ad. Mineur. Arithmétique élémentaire 250
A. Cahen. Théorie des nombres (d'après de la Vallée Poussin) 251
M. Nasso. Algebra elementare 251
F. Müller. Vocabulaire mathématique. 251
Th. Klompers. Algèbre financière 253

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 922-925; 926-934; 935-937; 938-941; 942-949; 950-951; 952-955; 956-961; 962-967; 968-973; 974-980;
pp. 30, 53, 79, 102, 126, 151, 175, 213, 238, 262, 274
École polytechnique de Paris, concours de 1900 151

SUPPLÉMENTS (30 pages).

Sur une transformation géométrique, par V. Retali 1-22
Les permutations carrées de base 6, par G. Tarry 23-30

QUESTIONS (*).

POSÉE	RÉSOL	POSÉE	RÉSOL	POSÉE	RÉSOL
(1) I ou (2) I	(2) X	(2) III		(2) V	(2) X
95 . . 206 (28)		825 . . 80 . .	NR	1048 . . 250 . .	NR
(1) IV ou (2) I		876 . . 216 . .	NR	1050 . . 280 . .	142
353 . . 159		882 . . 240		(2) VI	
×357 . . 159		×886 . . 240		1066 . . 104 . .	71
387, 2e p. 231 (29)	116	×889 . . 264 . .	19	1069 . . 128 . .	73
(1) V ou (2) I		892 . . 264		1071 . . 128 . .	142
415 . . 46 . .	NR	892bis . 280		1074 . . 142	
(1) VI ou (2) I		(2) IV		1075 . . 142 . .	91
×513 . . 71 (30)	NR	905 . . 32 . .	NR	1079 . 192	
(1) VII ou (2) I		939 . . 127 . .	21	1082 . . 215	
597 . . 280		953 . . 152		1085 . . 216 . .	163
598 . . 280 (31)	NR	×973 . . 216		1088 . 216	
(1) X		×986 . . 263		1090 . 240	
699 . . 279		×989 . . 264		1092 . 240, 280	144
(2) II		(2) V		1096 . . 264 . .	23
760 . . 80 . .	269	×1002 . . 32 . .	141	1098 . . 280 . .	118
767 . . 128		1030 . . 176		(2) VII	
778 . . 176 . .	NR	1033 . . 215		1101 . . 31, 51 .	
784 . . 216 . .	69	×1044 . . 246		1107 . . 51	
785 . . 216 .	44, 90	1046 . . 246		1138 . . 214 . .	NR

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

Digitized by Google

	POSÉE	RÉSOL
	(2) VII.	(2) X
×1138	215	
×1139	237	229
1140	237	NR
1144	261	NR
1150	279	92
	(2) VIII.	
1160	56	
1162	78	
1166	104	26
1167	104	
1173	152	231
1177	176	
1179	176	NR
1183	216	231
×1184	216	
1188	216, 239	
1190	240	
×1194	263	
×1195	264	256
1197	280	233
1198	280	27
	(2) IX	
1203	32	159
1214	80	121
1215	104	199
1216	104	149
×1217	104	48
×1219	128	49
1220	128	NR
×1221	128	121
1222	238	133
×1224	152	28
1225	152	NR
×1227	176	
1228	176	NR
1229	176	
×1230	176	74

	POSÉE	RÉSOL
	(2) IX	(2) X
×1231	215	199
×1232	215	
1233	215	NR
1234-1214, 80:		
	215, 264,	121
×1234(nouv.)	264	164
1235	215	96
×1236	216	77
×1237	216	49
×1238	216	202
1239	240	234
1240	240	NR
×1241	240	100
×1242	240	101
×1243	264	123
1244	264	
1245	264	52
1246	264, 280	NR
1247	280	NR
×1248	280	272
1249	280	166
1250	280	236
	(2) X.	
1251	32	168
×1252	32	
×1253	32	171
1254	32	257
1255	32	
×1256	32	173
1257	56	
×1258	56	150
1259	56	208
1260	56	257
1261	80	
1262	80	
1263	80	
×1264	80	

	POSÉE	RÉSOL
	(2) IX	(2) X
11265	104	
266	104	237
1267	104	
×1268	104	211
1269	128	
1270	128	NR
1271	128	NR
×1272	128	275
1273	152	
×1274	152	
1275	152	NR
1276	152	
×1277	176	238
1278	176	
1279	176	
1280	176	
×1281	215	261
1282	215	
1283	215	
1284	216	NR
×1285	216	NR
×1286	216	NR
1287	216	
×1288	216	
1289	240	277
1290	240	
1291	240	NR
1292	240	278
1293	264	NR
×1294	264	
×1295	264	
1296	264	
1297	276	NR
1298	276	NR
1299	276	NR
×1300	276	NR

TABLE DES NOMS.

Absolonne, 196, 198
Alasia, 67.
Alauda, 129.
Amodeo, 250, 251.
Andrien, 73, 105, 120, 150.
Appell, 62.
Arago, 163.
Archimède, 110, 222.
Aristarque, 163.
Arnoux, 158.
Bachman, 193, 251.
Baehr, 93.
Barbette, 159.
Barisien, 26, 27, 28, 52, 73, 80, 84, 95, 100, 102, 104, 105, 113, 118, 128, 136, 144, 149, 150, 167, 172, 173, 234, 235, 237, 240, 263, 264, 266, 272.
Bellavitis, 248.
Beman, 66.
Bernoulli, 95.
Bertrand (J.), 39.
Bettazzi, 251.
Biddle, 31.
Birkmore, 32.
Bobynine, 140.
Böcher, 252.
Böklen, 105.
Bombelli, 139.
Boutin, 32, 80, 128, 170, 257, 264.
Bouniakofsky, 68.
Boyer, 162.
Braikenridge, 64.
Braunmühl (von), 140.
Breton de Champ, 19.
Brianchon, 12, 90.
Brioschi, 112.

Digitized by Google

Brocard, 49, 56, 91, 110, 128, 152, 155, 158, 209. 247, 257, 272, 275, 276, 285.
Brunel, 89, 193.
Burckhardt, 88. 193, 252.
Bürgi, 139.
C.(A.),80,88,216.193,252, 271.
Cahen, 251.
Cajori, 140.
Cantor (M.), 139, 162.
Cardan, 139.
Cardoso-Laynes, 52, 56, 98, 104, 168, 208, 237.
Carnot, 162.
Catalan, 180.
Cataldi, 150.
Cauchy, 162, 188, 194.
Cayley, 113, 265.
Cesáro (E.), 5,37,57,111, 116, 134, 152, 240, 265, 271.
Chasles, 105, 109, 181, 196, 197.
Chatelet (Mad. du), 162.
Clairaut, 110.
Clavero y Guervos,29,30.
Clavius, 139.
Colart, 73, 142.
Comberousse (de), 249.
Copernic, 162.
Couturier, 135, 150, 168, 202, 211.
Cox, 102.
Critesco, 144, 202.
Curtze, 139, 140.
Darboux, 223.
Davis, 152.
Dedekind, 89, 251.
Delahaye, 20, 28,78,102, 122, 150.
Delannoy, 159.
Delassus, 194.
Demoulin, 176.
Déprez, 17, 23, 28, 44, 48, 49,73,74,76, 77, 91,92, 93,96,118,121,122,125, 128, 143, 149, 164, 168, 169, 195, 215, 232, 234, 235, 236, 240, 256, 261, 274, 276.
Desargues, 90.
Descans, 150, 257.
Descartes, 162, 166.
Dickstein, 140.
Dinostrate, 157.
Dioclès, 120.
Dirichlet, 251.
Dixon, 182.
Dostor, 44, 202.
Droz-Farny,11,12,56, 63, 71, 73, 77, 92, 93, 95, 102, 104, 105, 121, 143, 149 150, 164, 225, 226, 231.
Dupin, 60.
Duporcq, 71, 89, 91, 143, 171.
Enestrom, 140, 162.
Engel, 228.
Espanet, 91.
Eudoxe, 163.
Euler. 68, 77, 158, 162, 177, 179.
Fagnano 105.
Fairon, 142,150,211, 259.
Faure, 90.
Favaro, 140.
Faye, 163.
Feisthamel, 139.
Fermat, 162, 222.
Fibonacci, 128.
Fontené, 32,241,264,276.
Forcadel, 136.
Forsyth, 194.
Fourier. 194.
François, 150, 238.
Fricke, 194.
Fuchs, 195.
Galilée, 163.
Galdeano (de), 285.
Galois, 89, 162, 193.
Ganter 161.
Gauss, 89.
Gelcich, 140.
Gelin, 188.
Gérard (Gust.), 124, 166, 237, 258.
Gérard (Louis), 88, 189.
Gerono, 19.
Ghersi, 67.
Gillet, 20.
Glaisher, 265.
Gob, 17, 65, 98, 121, 195, 199, 201.
Goldenberg, 49.
Goursat, 194.
Graeber, 164.
Graf, 140.
Graindorge, 194.
Guldin, 212.
Günther, 139, 140.
Hacken, 21, 23.
Halphen, 120.
Heath, 140.
Heiberg, 140.
Heffter, 159.
Heller, 140.
Héraclite de Pont, 163.
Herschell, 163.
Hermite, 113.
Hesse, 90.
Hilbert, 89, 193.
Hipparque, 163.
Hippias, 157.
Hire (de la), 248.
Hoffmann, 129.
Hölder, 89, 193, 194.
Hüber, 159.
Hultsch, 140.
Huygens, 139.
Jamet, 269, 271.
Janssen, 163.
Jacobi, 113, 140, 228.
Jeřábek, 24, 121.
Joachimescu, 269.
Joachimsthal, 90.
Jordan, 228.
Kelvin, 195.
Kepler, 139, 188, 195.
Klein (F.), 194, 195, 228.
Klompers, 48, 253, 254.
Kovalewsky (S.) 163.
Krahé, 169.
Kronecker, 89, 113.
Lafontaine, 150.
Lagrange, 162.
Laguerre, 247.
Laisant, 285.
Lampe, 157.
Landsberg, 89.
Laplace, 162, 163, 188.
Laugel, 158.
Lebon, 162.
Leboucq, 150, 237.
Lecointe, 19.
Leibnitz, 162.
Lemoine, 13, 32, 44, 56, 78, 80, 127, 128, 135, 168, 190, 225, 236, 272.
Leverrier, 163.
Lie (S.), 194, 228.
Listray, 71, 100, 101.
Lobatschefsky, 162, 163.
Loewy, 163.
Longchamps (G. de), 55, 167, 195, 209.
Lorent, 216.
Loria (Gino), 69, 140, 162, 228, 244, 248, 250.
Lucas (Ed.), 159.
Maclaurin, 64, 95, 192.
Maillet, 158.
Malo, 79.
Mandart, 33, 92, 163, 196, 199.

Digitized by Google

Mannheim, 248.
Mansion, 19, 69, 89, 140, 157, 160, 162, 163, 180, 188, 189, 194, 195, 224, 229, 244, 250, 267.
Markof, 69.
Maurer, 252.
Meurice, 20.
Meyer (F. W.), 88, 89, 140, 193, 252.
Meyniel, 159,
Michel (Fr.), 252.
Mineur, 250.
Mister, 19.
Monge, 44, 162,
Müller (Félix) 140, 251.
Nagl, 140.
Nanson, 69.
Nasso, 251.
Neper, 139.
Netto, 88.
Neuberg, 11, 12, 15, 19, 23, 27, 32, 44, 48, 49, 52, 58, 69, 71, 74, 77, 80, 88, 89, 90, 91, 101, 104, 121, 123, 126, 128, 129, 135, 141, 143, 152, 155, 159, 161, 163, 166, 174, 176, 191, 199, 202, 208, 211, 213, 225, 233, 247, 257, 261, 264, 267, 274, 276.
Newcomb, 163.
Newton, 13, 162.
Niewenglowsky, 189.
Ocagne (d'), 247, 248, 249.
Orlando, 17, 32, 102, 110 121, 171.
Painlevé, 193.
Pascal, 88, 90, 162.
Perrier, 163.
Pfaff, 194.
Philippin, 249.
Philolaus, 163.
Picquet, 90
Pincherlé, 67.
Pire (E), 274.
Pirondini. 64.
Plakhowo, 76, 102, 165, 202, 212, 238.
Platon, 163.
Ploumen, 217, 256.
Plücker, 228.
Poincaré, 163, 195.
Poncelet, 195.
Pringsheim, 89.
Ptolémée, 163.
Pythagore, 151, 163.
Realis, 177.
Rebière. 141.
Retali, 74, 120, 141, 152, 153, 168, 209, 216, 231, 260.
Riemann, 188 195.
Ripert, 171, 226, 234. 267, 272.
Rocquigny (De), 151, 176.
Rose, 48, 53, 102, 103, 122, 150, 211, 235.
Rosenberger, 140.
Rouché, 249, 265.
Rudio, 161.
Ruex, 19.
Runge, 89.
Salmon, 247.
Saunderson, 162.
Schröter, 181, 196, 197.
Schuster, 67.
Schwartz. 195.
Segre, 228.
Serret (A)., 19, 188.
Servais (C.). 72, 268.
Simson, 236.
Sintzof, 28, 119, 234.
Smith, 66.
Somerfeld, 252.
Sonine, 69.
Soons, 48, 78 91, 92, 129, 149, 165, 171, 172, 173, 233, 256, 257, 271.
Sporer, 152.
Stäckel, 140.
Staigmuller, 140.
Staudt (von), 181.
Stegeman, 132.
Steiner, 94, 154, 155.
Steinschneider, 140.
Stirling, 188, 263.
Stewart, 190.
Sturm (A.), 140.
Sturm (Ch.), 66, 90, 113.
Sturm (R.), 161.
Stuyvaert, 14, 17, 181, 225.
Suter, 140.
Sylvester, 113.
Tannery (P.), 140.
Tarry (G.), 158, 236.
Tartaglia, 139.
Taylor, 89.
Tchebychef, 67.
Tedone, 250.
Third, 153, 215, 226, 268.
Thirion, 162.
Thiry (Cl.), 150.
Thomé, 195.
Tilly (De), 194.
Tisserand. 163.
Tonneau, 175.
Tortolini, 112.
Unger, 140.
Vahlen, 89.
Vallée-Poussin (Ch. de la), 251.
Van Dorsten, 28, 234.
Vasilief, 69.
Vessiot, 193.
Viète, 16.
Vignery, 102, 212.
Viviani, 120.
Voss, 89.
Vuibert, 31, 87, 215, 239, 262.
Wallis, 183, 187, 188, 265.
Wappler, 140.
Watt, 68.
Wasteels. 81, 220, 240, 274.
Weber (H.), 89, 193.
Weber (von), 193, 194.
Weierstrass, 89, 140, 162.
Wendt. 100.
Werpin, 256.
Wertheim, 140.
Wilkinson, 27.
Wiman, 193.
Wohlwill, 140.
Wölfling, 105.

Digitized by Google

QUESTIONS DE LA NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE

(1875-1880)

reproduites ou résolues dans *Mathesis*.

N. C. M.	MATHESIS.	
TOME.	ÉNONCÉ.	SOLUTION.
II. 1876.		
80	458	VII. 200
81	459	VIII. 21
98	221	IV. 92
102	260	VII. 191
104	»	XIII. 124
107	238	IV. 158
108	293	IX. 82
119	»	(2) III. 150
121	»	(2) III. 211
122	»	(2) V. 101
123	»	(2) V. 102
129	»	(2) V. 21
161	353	»
166	597	»
167	231	IV. 155
169	232	VII. 230
170	244	VI. 86
182	»	(2) VII. 50
205	239	IV. 189
210	»	II. 248
213	»	(2) V. 213
III. 1877.		
219	»	(2) VI. 54
227	239	IV. 189
238	»	»
250	291	VI. 135
274	434	VI. 43
281	427	V. 279
282	435	VIII 275
285	436	X. 87
288	426	VII. 197
289	425	VII. 195
306	576	IX. 252
312	»	(2) V. 126
313	»	(2) V. 175
314	»	(2) VI. 76

N. C. M.	MATHESIS.	
TOME.	ÉNONCÉ.	SOLUTION.
III. 1877.		
315	»	(2) VI. 101
316	»	(2) VI. 127
IV. 1878.		
323	256	VI. 87
338	»	(2) III. 125
339	»	(2) III. 259
362	»	(2) VI. 140
374	313	»
399	292	V. 36
410	461	VII. 25
411	»	(2) III. 75
414	»	(2) III. 98
423	»	(2) III. 173
430	»	(2) V. 88
431	»	(2) V. 88
V. 1879.		
510	204	III. 116, 191 V. 227
511	206	IX. 118
513	209	VIII. 167
VI. 1880.		
538	»	(2) III. 100
553	»	(2) VI. 210
554	»	(2) VI. 212
569	309	IV. 198
580	600	VIII. 103
581	468	VII. 163
582	490	IX. 192
588	460	VI. 189
590	»	V. 128
598	»	(2) VII. 27
599	»	(2) VI. 191
601	671	X. 91
602	671	X. 91
614	493	VIII. 172

Digitized by Google

La question 614 est la dernière de la N. C. M.

La question 166 de la N. C. M. est reproduite sous le n° 1532 dans les N. A. M. On trouve aussi dans ce dernier recueil, en 1843, p. 87, la solution des questions 57 et 222 de la N. C. M.; en 1876, p. 550. sous le n° 1207, celle de la question 83; en 1878, p. 253, celle de la question 141; en 1885, p. 38, celle de la question 343; enfin en 1881, p. 231, celle de la queston 404.

D'autre part, la collection du journal *El Progreso matematico* (publié à Saragosse par M. Z. G. de GALDEANO de 1891 à 1895 et repris en 1899) renferme 39 questions empruntées à la N. C. M. où elles portaient les numéros 42, 115, 119, 121, 122, 123, 172, 189, 207, 241, 245, 266, 321, 323, 337, 338, 339, 381, 383, 385, 389, 393, 400, 401, 402, 408, 421, 423, 431, 436, 545, 555, 562, 606, 607, 608, 609, 610, 611.

Plusieurs de ces questions ainsi rééditées ont été résolues dans le recueil susmentionné, ce qui a réduit très sensiblement le nombre des questions proposées dans la N. C. M., et demeurées non résolues. La vérification que j'ai faite à ce sujet me permet d'affirmer que ce nombre, difficile à préciser, doit être un peu moindre que 140. Il ne faut pas désespérer de le voir se réduire, si l'on continue la réimpression éventuelle des questions non résolues ou si nos lecteurs veulent bien consulter la collection des volumes du recueil publié par M. C. A. LAISANT où toutes les questions (résolues ou non), ont été réimprimées à l'exception cependant de celles d'Analyse infinitésimale, de Mécanique et d'Astronomie.

H. BROCARD.

M. H. Brocard a bien voulu se charger de la statistique des questions et solutions publiées dans les vingt volumes de la collection de *Mathesis*. Ce tableau vient s'ajouter à celui que notre dévoué collaborateur a donné, il y a dix ans, à la fin de la première série du journal.

Nous prions notre zélé confrère M. Z. G. de Galdeano d'agréer nos remercîments pour la gracieuse insertion, dans son Bulletin, des énoncés de la N. C. M. que M. H. Brocard a pris l'initiative de lui adresser. (P. M. et J. N.)

Digitized by Google

RÉPARTITION DES SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES

Tomes et Années.	Questions.	SOLUTIONS INSÉRÉES DANS PREMIÈRE SÉRIE.									
		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1re Série.											
I. 1881	100	45	27	12	7	5	3	2	2	2	.
II. 1882	100	.	36	38	9	6	4	4	.	1	5
III. 1883	100	.	.	8	39	20	19	3	2	5	5
IV. 1884	100	.	.	.	20	28	19	17	4	1	5
V. 1885	100	.	.	.	.	17	28	20	22	3	7
VI. 1886	50	.	.	.	.	.	14	16	7	4	8
VII. 1887	50	.	.	.	.	.	.	9	18	15	2
VIII. 1888	40	.	.	.	.	.	.	.	8	21	8
IX. 1889	30	.	.	.	.	.	.	.	.	10	16
X. 1890	30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12
2me Série.											
I. 1891	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
II. 1892	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
III. 1893	100	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
IV. 1894	100	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
V. 1895	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VI. 1896	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VII. 1897	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VIII. 1898	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
IX. 1899	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X. 1900	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Totaux.	1300	45	63	58	75	76	87	71	63	62	63
Moyennes approximatives par mois		3 à 4	5 à 6	4 à 5	6 à 7	6 à 7	7 à 8	5 à 6	5 à 6	5 à 6	5 à 6

Le nombre de solutions publiées dépasse généralement celui des questions énoncées parce que certaines solutions ont paru à diverses reprises, signées d'auteurs différents.

Digitized by Google

LES VINGT PREMIERS VOLUMES DE « MATHESIS ».

DIFFÉRENTS VOLUMES. DEUXIÈME SÉRIE.									Solutions publiées.	Questions non résolues.
II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.		
.	1	.	.	.	.	.	.	.	106	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	103	.
.	.	.	.	.	2	.	.	.	103	.
2	.	.	.	1	1	.	.	1	102	.
.	.	.	.	.	1	.	.	.	104	1
1	.	.	.	1	.	.	.	.	52	1
.	1	.	.	.	.	.	1	.	48	1
.	.	1	1	.	.	.	.	.	40	.
1	.	.	.	.	.	.	.	.	30	.
1	.	.	2	.	.	.	.	.	31	.
26	1	.	.	.	.	.	.	.	52	.
19	21	2	1	1	1	1	.	3	49	1
.	28	47	16	1	1	2	.	1	96	2
.	.	4	35	40	13	4	2	1	99	1
.	.	.	.	11	23	4	7	2	47	1
.	.	.	.	1	12	13	10	8	44	.
.	.	.	.	.	10	28	4	2	44	3
.	.	.	.	.	.	11	25	3	39	1
.	.	.	.	.	.	.	17	25	42	7
.	.	.	.	.	.	.	.	14	14	12
50	52	54	55	56	64	63	66	60	1245	31
4 à 5	4 à 5	4 à 5	4 à 5	4 à 5	5 à 6	5 à 6	5 à 6	5 à 6	5 à 6	»

auf pour le premier volume, le nombre de solutions publiées a toujours atteint son imum durant l'année suivante, pour décroître ensuite assez régulièrement.

Digitized by Google

IMPRIMERIE A. HOSTE, RUE DU CALVAIRE, 23, GAND.

Digitized by Google

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

PAR

V. RETALI,

PROFESSEUR A MILAN.

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. II, 1900.)

Dans sa dissertation inaugurale (*), le Dr Henkel a étudié deux transformations que l'on peut définir comme il suit : « Étant donnée une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires OX, OY, on mène par l'origine une parallèle OP' à la tangente PT au point P de la courbe, et une parallèle OP'' à la normale en P : trouver les lieux des points d'intersection P' et P'' de ces droites OP', OP'' avec la parallèle à OY menée par le point P. » Après avoir établi quelques propriétés générales des transformations

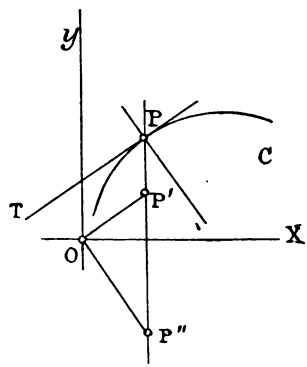


Fig. 1.

(*) *Ueber die aus einer Curve* $y = f(x)$ *abgeleiteten Curven* $y_1 = xf'(x)$ (*Tangentencurve*) *und* $y_2 = -x : f'(x)$ (*Normalcurve*), *mit specieller Anwendung auf die Parabel*, Marburg, 1882. Pour la première de ces transformations, M. Neuberg a proposé la désignation de *transformation pseudo-newtonienne*. Comme publications antérieures se rattachant à la même question, on peut citer : Hochheim, *Die Differentialcurven der Kegelschnitte* (Halle, 1874); Völker, *Ueber eine abgeleitete Curve*, u. s. w. (Inaugural Diss., Marburg, 1880). Je suis redevable de ces renseignements au Dr Henkel, actuellement professeur à Pforta.

Digitized by Google

indiquées, M. Henkel examine avec détail le cas où C est la parabole

$$y^2 = 4m(x - \alpha),$$

et les transformées sont respectivement

$$y^2(x - \alpha) - mx^2 = 0,$$

et

$$my^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0,$$

dont la première, si $\alpha = m$, devient la *cubique mixte* de M. De Longchamps (*). En voulant étendre aux courbes planes algébriques les transformations imaginées par M. Henkel, dont la première présente une analogie évidente avec la construction donnée par Leibnitz pour les Robervalliennes (**), j'ai été conduit, il y a quelques années, à des résultats assez généraux et en particulier à des générations, que je crois nouvelles, pour la plupart des cubiques ayant reçu un nom et pour quelques quartiques unicursales; mais, distrait par d'autres occupations, j'avais presque oublié ces recherches, lorsque mon attention y a été rappelée récemment par un mémoire de M. Brocard (***). Ce géomètre, prenant son point de départ dans une question posée par M. Petit-Bois dans *Mathesis* (année 1898, p. 215), applique

(*) *Journal de Math. spéciales,* année 1886, pp. 245-247. De même si $\alpha = m$, la *Normalcurve* devient la cubique duplicatrice $m(x^2 + y^2) = x^3$ de M. De Longchamps (*ibid.*, pp. 136-138).

(**) Voir Aubry, *De l'usage des figures de l'espace,* etc. (*ibid.*, année 1896, pp. 179-180). La Robervallienne de cercle dont parle M. Aubry n'est pas la cubique d'Agnesi, mais on peut obtenir cette cubique en appliquant la construction de Leibnitz à l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4a^2$ (voir le n° 6 de cette note). La deuxième transformation de M. Henkel est le produit de la première avec une inversion (spéciale) de Hirst.

(***) *Sur une transformation géométrique* (*transformation pseudo-newtonienne*). Ce mémoire a paru dans les publications de la Société royale des sciences de Liége et a été joint comme supplément à la livraison de mars 1898 de *Mathesis*. La transformation indiquée dans la note de M. Petit-Bois, faisant suite au mémoire de M Brocard, est le deuxième du Dr Henkel, qui a aussi donné la relation entre les aires (*loc. cit.*, § 5).

Digitized by Google

d'abord la première des transformations indiquées au cercle, à la parabole $y^2 = 4mx$, à la courbe en *huit* et au *folium de Descartes;* mais c'est dans les applications qu'il fait aux courbes transcendantes que M. Brocard trouve les résultats plus intéressants et curieux, par exemple : les transformées de la logarithmique, de la cycloïde, de la sinusoïde, de la tangentoïde, de la chaînette, de la tractrice sont respectivement la droite, la cissoïde, la *Kohlenspitzencurve*, l'*anguinea* (serpentine), la *Kreuzcurve* et la circonférence.

Quoique ces relations inattendues entre des courbes algébriques et des courbes transcendantes forment le côté le plus intéressant de la transformation, nous croyons qu'il n'est pas inutile de l'approfondir aussi pour les courbes algébriques, et tel est le but de cette note.

Si, dans la transformation que je désigne ci-après par le symbole [Y, O, *s*], nous prenons la droite *s* (*axe*) à l'infini, et pour *premier pôle* Y le point à l'infini de | OY |, nous avons la transformée *pseudo-newtonienne* (X) de M. Brocard; si, en conservant le *deuxième pôle* en O, le premier pôle est le point à l'infini de | OX |, nous avons (Y); si *s* est une droite propre, Y son point à l'infini et O le point à l'infini sur la perpendiculaire, on tombe sur la construction donnée par Leibnitz pour la Robervallienne. Dans les deux premiers numéros, utilisant la théorie des correspondances (*m*, *n*) et quelques résultats obtenus par MM. Schoute (*) et Zeuthen (**), je détermine les caractéristiques pluckériennes de la transformée d'une courbe algébrique n'ayant pas de relations particulières de position avec l'axe et les pôles de la transformation; le numéro suivant contient les modifications que les résultats obtenus subissent lorsque certaines de ces relations ont lieu; les cinq derniers numéros appliquent la transformation aux coniques, aux cubiques et à la quartique de la troisième classe.

(*) *Sur un problème de Steiner.* (Bull. des Sc. mathém., 2e série, t. X, p. 242.)

(**) *Id.*, ibid., t. XI, avril 1887.

Digitized by Google

1. Dans le plan d'une courbe générale C_m^n, du degré n, de la classe $m = n(n-1)$ et du genre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

on donne une droite fixe s (fig. 2) et deux points fixes Y et O n'ayant aucune relation particulière de position ni entre eux ni avec C_m^n : si t est la tangente au point variable P de la courbe et P' la projection faite de O sur le rayon | YP |, du point (ts), lorsque P décrit C_m^n, le point P' engendre une certaine courbe que nous nous proposons de déterminer (*). D'abord, comme le lieu cherché et C_m^n se correspondent point à point, ils sont du même genre ; on reconnaît ensuite aisément que le lieu de P' est le produit de deux faisceaux Y et O de rayons en correspondance (m, n) : en effet, à un rayon y, du faisceau Y, coupant C_m^n aux points $P_1, \ldots P_n$, correspondent dans le faisceau O les n rayons qui projettent les points $(t_1 s) \ldots (t_n s)$; à un rayon o du faisceau O correspondent dans le faisceau Y les m rayons qui projettent du point Y les points de contact des tangentes à C_m^n issues du point (os). *Le lieu cherché est donc* (**) *une courbe de l'ordre* n + m *ayant un point* n *-uple en* O *et un point* m *-uple en* Y ; nous

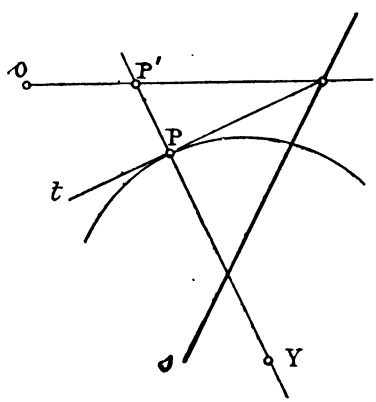


Fig. 2.

(*) En prenant pour s la droite à l'infini, on tombe sur la transformation considérée par M. d'Ocagne dans les six derniers numéros de son mémoire *Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales.* (*Journal de Sc. Math.* de M. Gomes Teixeira, n° XLVIII, 1888.) L'autre transformation formant l'objet de ce mémoire en est le *produit* avec une inversion (spéciale) de Hirst.

(**) Weyr (Emil), *Beiträge zur Curvenlehre*, § 49 (Wien, 1880.)

Digitized by Google

le désignerons par C_{3m}^{n+m}, car nous verrons bientôt que sa classe est $3m$.

De la définition de la transformation il s'ensuit que C_{3m}^{n+m} passe par les n points où C_m^n est coupée par l'axe s, et par les m points de contact des tangentes à C_m^n issues de O. Les tangentes au point m-uple y sont les rayons du faisceau Y qui correspondent au rayon (OY) considéré comme appartenant au faisceau O, c'est-à-dire les tangentes à C_m^n issues de Y; de même, les tangentes au point n-uple O sont les rayons qui projettent du point O les points où s est coupée par les tangentes menées à C_m^n aux points où cette courbe est coupée par la droite $|OY|$.

Outre les deux points multiples Y et O, la courbe possède d'autres points doubles ordinaires que nous allons déterminer. Lorsque le rayon y varie dans le faisceau Y, les $\frac{1}{2}n(n-1)$ intersections mutuelles des tangentes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ engendrent une courbe C^ν dont l'ordre est

$$\nu = \frac{1}{2}(2n-3)m;$$

les points $D_1, \ldots, D_\nu$ où cette courbe est coupée par s sont des points simples formés chacun par l'intersection d'une couple de tangentes homologues, c'est-à-dire dont les points de contact sont alignés avec Y sur une droite y_ν. Cela posé, au rayon y_ν du faisceau Y correspondent, dans le faisceau O, n rayons parmi lesquels deux vont coïncider en la droite $o_\nu \equiv |OD|$; autrement dit, les droites y_ν sont des rayons de diramation du faisceau Y. Au rayon o_ν de O correspondent en Y, m rayons dont deux coïncident en y_ν; donc les ν rayons o_ν sont des rayons de diramation du faisceau O, mais ils doivent, aussi bien que les ν rayons y_ν, être comptés doubles et les points $(y_\nu o_\nu)$ donnent lieu sur C_{3m}^{n+m} à ν points doubles ordinaires. La courbe n'a pas d'autres points

(*) Schoute, *loc. cit.*

Digitized by Google

multiples, outre ceux que nous avons trouvés et qui équivalent ensemble à

$$\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}(2n-3)m=\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n]$$

points doubles ordinaires, car elle est du genre

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

et l'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2=\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n].$$

Les deux faisceaux Y et O ont respectivement $2m(n-1)$ et $2n(m-1)$ rayons de diramation (*), $(2n-3)m$ desquels, pour chacun des deux faisceaux, sont absorbés par les rayons projetant les points doubles ordinaires; à une tangente t de C_m^n issue de Y correspond dans le faisceau O un groupe de n rayons parmi lesquels deux sont réunis en le rayon qui joint O à (st), donc les m tangentes de C_m^n issues de Y sont des rayons de diramation du faisceau m-uple et touchent C_{5m}^{n+m} sur la droite s; comme

$$(2n-3)m+m=2m(n-1),$$

le faisceau Y ne peut posséder d'autres rayons de diramation. Dans le faisceau O, les droites qui projettent les points où C_m^n est coupée par s sont évidemment des rayons de diramation et touchent C_{5m}^{n+m} sur la droite s; des $m+n=n^2$ points du lieu placés sur s, m sont donc les points de contact des tangentes qui lui arrivent du point m-uple, et les autres sont les points de contact des tangentes issues du point n-uple. Il y a encore $3m-3n$ autres tangentes issues de O, qui forment les rayons de diramation restants du faisceeu O. Si la tangente T au point d'inflexion I de C_m^n coupe s au point η, au rayon $|O\eta|$ du fais-

(*) Weyr, *loc. cit.*, § 6.

Digitized by Google

ceau O en correspondent m du faisceau Y parmi lesquels deux coïncident dans le rayon double |YI|, car la tangente stationnaire t compte pour deux tangentes de C^n issues de γ; $|O\gamma|$ est donc un rayon de diramation du faisceau O et le point $I' \equiv (|O\gamma|, |YI|)$ est le point de contact de la tangente $|O\gamma|$ à la transformée. Ces rayons de diramation sont en même nombre que les points stationnaires de C^n_m, à savoir, puisqu'il n'y a pas de rebroussements (*), $3(m-n)$ et, comme

$$(2n-3)m+n+3(m-n)=2n(m-1),$$

le faisceau n-uple O ne possède pas d'autres rayons de diramation.

2. Supposons maintenant que Y tombe sur la droite s (fig. 3). Les résultats précédents subsistent encore, mais il faut remarquer que dans ce cas les tangentes au point m-uple Y coïncident avec les autres m tangentes que l'on peut mener à C^{n+m}_{3n} du point Y, c'est-à-dire avec les tangentes menées par ce point à la courbe primitive C^n_m; sur chaque branche de la courbe passant par Y la tangente en Y a avec la courbe une rencontre triponctuelle et par suite Y est un *point* m *-uple d'inflexion.* Nous avons donc le théorème :

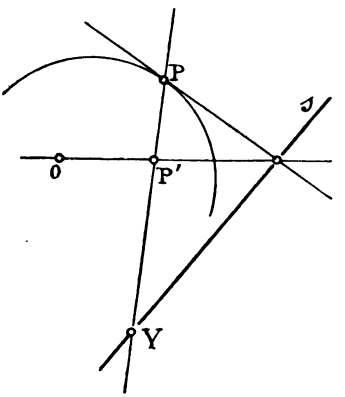


Fig. 3.

« *Étant donnés dans un plan une courbe générale, de l'ordre* n *et de la classe* m, *deux points fixes* Y, O *et une droite fixe* s, *passant par* Y : *si l'on fait correspondre à un point variable* P *de* C^n_m *l'intersection* P' *du rayon* |Y P| *avec celui qui projette de* O *la trace sur la droite* s *de la tangente* P, *le lieu de* P' *est une courbe* $C^{(n^2)}_{3m}$ *du même genre que* C^n_m, *de l'ordre* n^2 *et de*

(*) Salmon, *Courbes planes*, p. 93, formule (7) de l'édition française.

Digitized by Google

la classe 3m ; *il a un point* n -uple *ordinaire en* O, *un point* m -uple *d'inflexion en* Y *et*

$$\frac{1}{2}m(2n-3)$$

points doubles ordinaires ; il passe par les points de contact des tangentes à C_m^n *issues de* O *et par les points où* C_m^n *est coupée par* s ; *les tangentes en ces derniers points vont se couper en* O. »

Nous désignerons la transformation indiquée par le symbole [Y, O, s], et appellerons Y *premier pôle*, O *deuxième pôle*, s *axe* de la transformation ; si s est à l'infini, nous avons la transformation *pseudo-newtonienne*. Si s est une droite propre et si les deux pôles sont à l'infini sur deux droites rectangulaires, la transformée de C_m^n en est la Robervallienne.

Lorsque C_m^n a $\varkappa$ rebroussements de la première espèce, et pas d'autres singularités, son genre est

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\varkappa$$

et sa classe

$$n(n-1)-3\varkappa;$$

sa transformée est toujours du degré $n+m$, le premier pôle est un point m -uple ordinaire, mais comme la courbe C' considérée dans le numéro 1 est maintenant du degré

$$\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa],$$

les autres points doubles sont aussi au nombre de

$$\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa],$$

et l'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)-\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}n(n-1)$$
$$-\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa]=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\varkappa,$$

Digitized by Google

ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'autres points multiples. Pour déterminer la classe de la transformée, il suffit d'observer que parmi les points doubles fournis par la courbe C^{ν}, il y en a $\varkappa$ qui sont des rebroussements, tandis que les autres

$$\frac{1}{2}[(n-3)m-3\varkappa]$$

sont des points doubles ordinaires : la classe est donc

$$(m+n)(m+n-1)-m(m-1)-n(n-1)$$
$$-[(2n-3)m-3\varkappa]-3\varkappa=3m.$$

Nous en concluons que, *même lorsque la courbe primitive* C^n_m *a* $\varkappa$ *rebroussements de la première espèce, la transformée est toujours du degré* n + m *et de la classe* 3m.

3. Si C^n_m a des relations particulières de position avec les pôles ou avec l'axe de la transformation, ou bien si elle possède d'autres singularités que des rebroussements, les résultats qui précèdent subissent des modifications que l'on doit établir dans chaque cas déterminé; néanmoins, pour traiter des cas même relativement simples, il est nécessaire d'indiquer ces modifications lorsque les pôles sont des points multiples ou bien si les droites s et $|YO|$ sont des tangentes multiples de la courbe primitive.

a) Lorsque le premier pôle est un point simple de C^n_m, à chaque rayon o du faisceau O correspondent dans le faisceau Y les m rayons qui projettent les points de contact avec C^n_m des tangentes issues du point (os); mais à un rayon de Y en correspondent $n-1$ du faisceau O, et la droite $|OY|$ se sépare une fois du lieu. De même si Y est un point μ-uple ordinaire sur C^n_m, la droite $|OY|$ se détache μ fois de la transformée qui est le produit de deux faisceaux Y et O en correspondance $(m, n-\mu)$ et par suite de l'ordre $m+n-\mu$.

Si Y est un point simple de C^n_m, deux des m rayons correspondant en Y au rayon $|OY|$ vont se confondre en la tangente de C^n_m au point Y : de même, chaque passage de C^n_m par le premier pôle donne naissance à une coïncidence de deux tangentes

Digitized by Google

au point m uple d'inflexion. Si Y est un point d'inflexion (simple) de C_m^n, avec la tangente stationnaire correspondante vont se confondre trois des m tangentes en Y, etc.

b) Le degré de la transformée n'est pas altéré si le deuxième pôle O est sur C_m^n un point multiple de l'ordre ω ($\overline{>} 1$); mais dans ce cas, parmi les tangentes à C_{2m}^{n+m} en O, il y en a ω qui coïncident avec celles de C_m^n au même point.

c) Lorsque l'axe s est une tangente multiple ordinaire de l'ordre σ de C_m^n, il se détache σ fois de la transformée, et la courbe résiduelle, de l'ordre $m + n - \sigma$, est le produit de deux faisceaux Y et O en correspondance $(m - \sigma, n)$. Y est un point $(m - \sigma)$ uple d'inflexion, etc.

Si s est une tangente stationnaire de C_m^n, elle se détache deux fois de la transformée, etc.

d) Lorsque la droite $|OY|$ qui joint les deux pôles est une tangente simple de la courbe primitive, considérée comme rayon du faisceau O il lui correspond, dans le faisceau Y, m rayons dont un est $|YO|$, et comme ce dernier rayon est un rayon de diramation du faisceau Y, les deux faisceaux Y et O sont en position réduite du premier ordre (*); la droite $|YO|$ se détache de leur produit, et la courbe résiduelle a un point $(m-1)$ -uple ordinaire en O, et touche en ce point la droite $|OY|$: de même, si la droite $|YO|$ est tangente ρ -uple de C_m^n, les deux faisceaux Y et O sont en position réduite de l'ordre ρ, et leur produit est une courbe de l'ordre $m + n - \rho$ ayant un point $(m - \rho)$ -uple d'inflexion en Y et un point $(n - \rho)$ -uple ordinaire en O (**).

4. Nous allons maintenant appliquer la transformation à une conique C_2^2 en position générale par rapport à l'axe et aux pôles (fig. 4) : la transformée est une quartique C_4^4 de la sixième classe ayant un (seul) point d'inflexion au premier pôle et un point double ordinaire au deuxième pôle. Pour

(*) Weyr, *loc. cit.*, § 50.
(**) Id., *loc. cit.*, § 52.

Digitized by Google

déterminer le troisième point double V, je mène par Y la droite s' conjuguée de s par rapport à C_1^2; la droite qui joint O au pôle de s' par rapport à C_1^2 va couper s' au point cherché, car dans le cas actuel la courbe C' (voir n° 1) se réduit à la polaire de Y par rapport à C^2. Comme du point O arrivent à la quartique deux autres tangentes, savoir les rayons qui projettent les points où C_1^2 est coupée par s, aucune des tangentes au point double O n'est stationnaire, et, d'après un théorème d'Ameseder (*), le troisième point double non plus n'a de tangentes stationnaires.

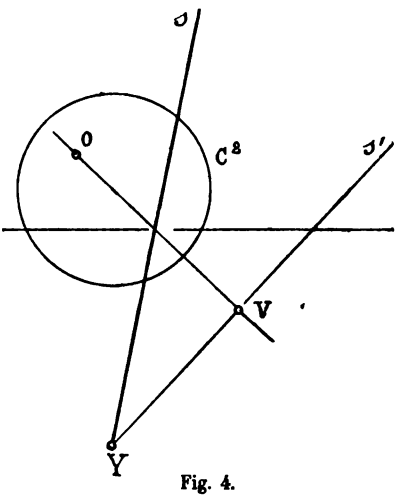


Fig. 4.

La propriété caractéristique de ces quartiques, qui ont un point double d'inflexion et deux points doubles ordinaires, est la suivante : « Les points de contact de la courbe avec ses deux tangentes issues d'un point double ordinaire sont alignés avec le point double d'inflexion Y, sur la droite séparée harmoniquement par les tangentes d'inflexion en Y de celle qui joint Y avec le troisième point double (**). »

(*) Si dans une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe, il y a plus de deux tangentes aux points doubles qui sont stationnaires, les autres tangentes aux points doubles sont aussi stationnaires. (*Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wiss.*, Bd 85, S. 881.)

(**) En prenant les points doubles pour sommets du triangle de référence, et si Z est le point double d'inflexion, l'équation de la quartique peut se mettre sous la forme

$$(ay^2 + 2hxy + bx^2)z^2 + cx^2y^2 = 0,$$

la cubique polaire du sommet Y est

$$(az^2 + cx^2)y + hxz^2 = 0$$

et la droite conjuguée harmonique du côté $y = 0$ par rapport aux tangentes

Digitized by Google

Il découle immédiatement de la génération indiquée de la quartique que « deux points de la courbe alignés avec le point double d'inflexion sont séparés harmoniquement de ce dernier par la droite qui joint les deux autres points doubles », et que les tangentes en deux points alignés avec le point double d'inflexion vont se couper sur la droite qui joint les deux autres points doubles; on peut réunir ces deux théorèmes connus (*) en l'énoncé unique : « Une quartique rationnelle ayant trois points doubles, dont l'un est d'inflexion, est homologique-harmonique lorsque l'on prend le point double d'inflexion pour centre et la droite qui joint les deux autres points doubles pour axe d'homologie. »

Réciproquement, étant donnée une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe C_6^4 ayant un seul de ses trois points doubles d'inflexion, si C^2 est une conique inscrite dans l'angle des tangentes au point double d'inflexion Y, et passant par les points de contact O_1, O_2 des tangentes menées à C_6^4 par l'un des autres points doubles, par exemple de O : la transformée de C^2 est C_6^4 lorsque l'on prend $|O_1O_2| \equiv s$ pour axe, Y pour premier pôle et O pour deuxième pôle. En effet, C_6^4 et cette transformée ont en commun le point double Y avec les mêmes tangentes d'inflexion, le point double O avec les mêmes tangentes et les deux points simples O_1, O_2 aussi avec les mêmes tangentes, ce qui équivaut à dix-huit (8 + 6 + 4) points communs.

5. Le cas où le deuxième pôle et l'axe sont pôle et polaire par rapport à C^2 doit être considéré à part : en ce cas, le troi-

d'inflexion en Z est $hy + bx = 0$; cela posé, nous avons identiquement

$$[(ay^2 + 2hxy + bx^2)z^2 + cx^2y^2] - xz^2(hy + bx) = y[(az^2 + cx^2)y + hxz^2]$$

et le théorème est démontré. L'absence du terme linéaire en z dans l'équation de la quartique montre immédiatement que la courbe est *homologique-harmonique*, $x = y = 0$ étant le centre et $z = 0$ l'axe d'homologie.

(*) Amesseder, *Ueber rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Theil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen.* (Sitzber. der W. Ak., Bd 79.)

Digitized by Google

sième point double V se réunit au point double O formant un tacnode en O; la polaire du point double d'inflexion par rapport à C^2 est la tangente tacnodale. La transformée est donc une quartique de sixième classe ayant un tacnode en O et un point double d'inflexion en Y : on pourrait l'appeler *cappa projectif*, car si C^2 est un cercle ayant son centre en O, elle devient la courbe appelée *cappa* (*).

Les points de contact des tangentes menées à un cappa projectif par son tacnode sont donc alignés avec le point double d'inflexion et séparés harmoniquement par ce point et la tangente tacnodale.

Le *cappa* (proprement dit) est donc une quartique circulaire de la sixième classe ayant un tacnode en son centre et un point double d'inflexion à l'infini sur la perpendiculaire à la tangente tacnodale; les deux tangentes qui arrivent au cappa du tacnode sont les droites isotropes issues de ce point, autrement dit, le tacnode est aussi le foyer singulier de la courbe. Les tangentes d'inflexion au point double à l'infini touchent C^2 sur la tangente tacnodale; le cercle C^2 et le *cappa*, ayant entre eux double contact aux points circulaires à l'infini, ont quatre autres points communs qui, par la définition même de la transformation, sont sur les bissectrices des angles des axes. Observons aussi que le *cappa* n'a pas de tangentes doubles proprement dites, car les quatre de ces tangentes, possédées en général par une quartique de la sixième classe, sont absorbées par les deux tangentes au point double d'inflexion et par la tangente tacnodale; quant aux points d'inflexion, deux tombent en le point double à l'infini et les quatre autres sont absorbés par le tacnode.

6. Par la transformation qui nous occupe, on peut obtenir les cubiques de la quatrième classe, comme transformées de coniques de deux manières différentes :

a) en prenant les deux pôles sur une tangente à C^2;

b) en prenant pour axe une tangente à C^2.

(*) Brocard, *loc. cit.*, p. 5.

Digitized by Google

Dans le premier cas, la transformée est une C_4^5 ayant un point d'inflexion au premier pôle Y, touchant | YO | au deuxième pôle O, et passant par les deux points O_1, O_2 de rencontre de C^2 avec s; ces deux points sont les antitangentiels de O; la tangente stationnaire en Y et l'autre tangente, outre | Y O |, de C^2 issue de Y; le point double est l'intersection de la droite menée par Y et conjuguée à s, avec celle qui unit O au conjugué harmonique de Y par rapport à O_1, O_2.

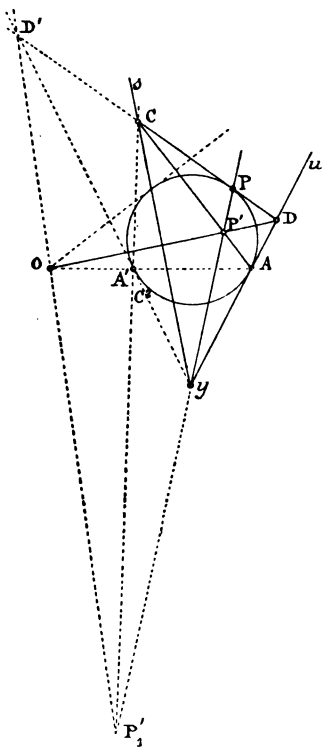


Fig. 5.

Réciproquement, étant donnée une C_4^5, si O est l'antitangentiel d'un point réel d'inflexion Y, et si O_1, O_2 sont les deux antitangentiels de O, t la tangente (stationnaire) en Y : à chaque conique C^2 passant par les deux points O_1 O_2 et tangente aux droites | Y O |, t, correspond C_4^5 par la transformation [Y, O, | O_1 O_2 |].

Quand l'axe s touche C^2 au point O, la transformée est une C_4^5 ayant un point d'inflexion au premier pôle Y, et touchant C^2 en O; le point double V se confond avec le deuxième pôle, la tangente stationnaire en Y est l'autre tangente de C^2 issue de Y, les deux antitangentiels O_1, O_2 de O sont alignés avec Y sur la droite s harmoniquement séparée de | Y V | par C^2. Réciproquement, étant donnée une C_4^5, si O est l'antitangentiel d'un point d'inflexion Y et si O_1 et O_2 sont les antitangentiel de O, V le point double et t la tangente en Y : la transformée de la conique C^2, passant par O_1 et O_2, touchant | Y O | $\equiv u$ en O et tangente à t, au moyen de [Y, V, u], est C_4^5.

Digitized by Google

7. Supposons maintenant que les deux pôles Y et O de la transformation soient conjugués par rapport à C^2, et soit s la polaire de O par rapport à C^2 et A le point de contact d'une tangente à C^2 issue de Y. Si une tangente variable touche C^2 au point P et coupe respectivement s et | Y A | aux points C et D, on reconnaît aisément que les droites | OD | et | AC | vont se couper en un point P′ du rayon | YP | (*); il s'ensuit que la transformée de C^2 par [Y, O, | YA |] est aussi sa transformée au moyen de [Y, A | Y C |].

En choisissant convenablement la conique à transformer, ses pôles et l'axe de la transformation, on obtient de nouvelles générations pour la plupart des cubiques ayant reçu un nom, et l'on peut établir aisément pour ces courbes, non seulement les propriétés connues, mais aussi d'autres que je crois nouvelles.

Conchoïde Slusienne générale. — Si C^2 est une ellipse, prenons pour le pôle Y le point à l'infini dans la direction du petit axe, et soit u la tangente au sommet A du grand axe. Prenons le deuxième pôle O sur le grand axe AA′ à une distance $\overline{OA}$ de A égale en valeur absolue au demi petit axe; la transformée de C^2 au moyen de [Y, O, u] sera une conchoïde Slusienne (**) ayant le point double en O, le sommet en A, et pour asymptote d'inflexion la tangente à l'ellipse en A′.

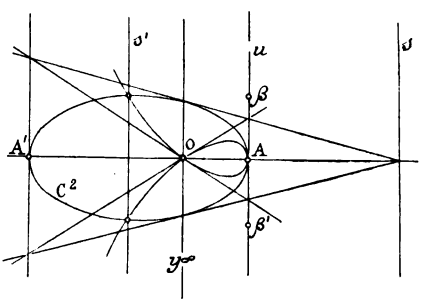


Fig. 6.

(*) En rejetant à l'infini la tangente | YA |, on tombe sur une propriété évidente de la parabole.

(**) La droite à l'infini coupe l'ellipse C^2 en deux points dont les tangentes, savoir les asymptotes imaginaires, vont couper u aux points doubles de l'involution $(A, \infty ; \beta, \beta')$, où $\overline{\beta' A} = \overline{A\beta} =$ à la moitié du petit axe; lorsque l'angle $\beta O \beta'$ est droit, $OA = A\beta$ et les points à l'infini outre Y, de la transformée sont les points circulaires.

Digitized by Google

Elle coupe C^2 sur la polaire s de l'O, et sur la droite s' harmoniquement séparée de s par le point double et l'asymptote d'inflexion; les deux points antitangentiels du sommet A sont les intersections de C^2 avec la polaire de O; les tangentes au point double sont les diagonales du quadrilatère simple formé par les deux tangentes à l'ellipse en AA' et par celles qui la touchent sur | YO |, etc.

On obtient la même conchoïde en appliquant à la même ellipse C^2 la transformation [Y, A, s].

Strophoïde droite. — Lorsque C^2 est un cercle ayant O pour centre, si Y est à l'infini et $\overline{A'A}$ un diamètre perpendiculaire à la direction Y, la transformée de C^2 par [Y, O, u] est la strophoïde droite ayant le nœud en O et le sommet en A; la tangente au cercle en A' est l'asymptote d'inflexion, les tangentes en O sont rectangulaires. La droite des points d'inflexion est symétrique de l'asymptote d'inflexion par rapport au centre du segment $\overline{OA}$; la médiatrice du segment $\overline{A'O}$ coupe la cubique sur le cercle C^2; les tangentes de la strophoïde aux points circulaires à l'infini vont se couper au sommet A, etc. On obtient la même strophoïde en appliquant au cercle C^2 la transformation pseudo-newtonienne [Y, O, ∞] (*).

Trisectrice de Maclaurin. — C^2 est une ellipse dont le petit axe $\overline{A'A}$ est les $\frac{2}{3}$ du grand axe, u sa tangente au sommet A, le premier pôle Y est à l'infini de u, $A'O = \frac{1}{3}OA$; la polaire s du deuxième pôle O par rapport à C^2 est symétrique de u par rapport à O; cela posé, en appliquant à C^2 soit la transformation [Y, O, u], soit la [Y, A, s], on obtient la trisectrice de Maclaurin ayant le sommet en A, le nœud en O et la tangente à l'ellipse en A' par asymptote d'inflexion. La cubique est circulaire; les tangentes au nœud forment l'angle $\frac{\pi}{3}$; la distance $\overline{OA'}$ du nœud à l'asymptote d'inflexion est $\frac{1}{3}$ de celle du nœud au sommet. La droite des points d'inflexion est à l'infini et *les deux*

(*) Dans la transformation pseudo-newtonienne, une translation de la courbe primitive dans la direction du premier pôle n'altère pas la transformée, comme il est évident soit géométriquement, soit par l'analyse. (Cf. Henkel, *loc. cit.*, § 4.)

Digitized by Google

points d'inflexion imaginaires de la courbe sont les deux points circulaires à l'infini. Observons encore que la cubique coupe C^2, d'abord en deux points réunis en A sur u, ensuite sur la polaire s de O et sur la droite s', harmoniquement séparée de s par l'asymptote d'inflexion et le point double (*).

Folium de Descartes. — Prenons maintenant pour C^2 une ellipse dont l'excentricité $e = \frac{1}{2}$. Soit O un foyer (à gauche), A' le sommet le plus proche de O, et A l'autre sommet; nous avons $2\overline{AO} = OA$ et la distance de la directrice s (polaire de O) au sommet A' est égale au demi grand axe. En dénotant comme auparavant par u la tangente en A et par Y le point à l'infini de u, nous avons pour transformées de C^2, soit au moyen de [Y, O, u], soit au moyen de [Y, A, s], le *folium de Descartes* ayant le sommet en A et le nœud en O; la tangente à l'ellipse en A' et l'asymptote d'inflexion et les tangentes en O sont rectangulaires. La droite des points d'inflexion est à l'infini, et si nous prenons sur la tangente u du sommet A les segments $AB = -AC = OA : \sqrt{3}$ (égaux à la moitié du petit axe de C^2), les rayons doubles de l'involution quadratique O(A, ∞ ; B, C) marquent sur la droite à l'infini les deux points d'inflexion imaginaires du *folium*.

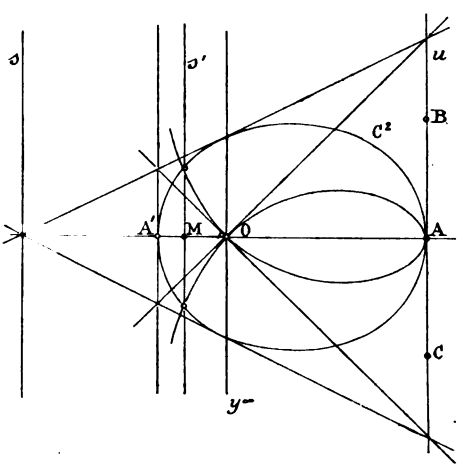


Fig. 7.

(*) En prenant pour C^2 une ellipse dont le petit axe A'A est $\frac{1}{2}$ du grand axe, on obtient la cubique circulaire considérée par M. Jerabek (*Mathesis*, octobre 1898). Voir aussi ma note sur la même cubique. (*Ibid.*, t. IX, pp. 87-89.)

**

Digitized by Google

Les points antitangentiels du sommet A sont les intersections de C^2 avec la directrice s, et les deux autres points communs au *folium* et à l'ellipse C^2 peuvent se construire en observant que la droite s', séparée harmoniquement de s par le nœud et l'asymptote d'inflexion, coupe $|A'A|$ en un point M tel que $A'M = \frac{2}{5} A'O$.

Folium parabolique droit. — C^2 est une parabole ayant son foyer en O et son sommet en A, s est la directrice, u la tangente au sommet, s' la symétrique de s par rapport à O : la transformée de C^2 par les deux transformations indiquées est le folium parabolique droit ayant le sommet en A et le nœud en O. Les tangentes en O sont rectangulaires et la droite à l'infini est tangente stationnaire; les deux antitangentiels de A sont les points où la parabole est coupée par sa directrice, et les deux autres intersections du *folium* avec la parabole sont sur s'. Les deux points d'inflexion imaginaires sont sur la parallèle à u dont les distances à u et à s sont entre elles dans le rapport 1 : 2.

Cubique mixte. — C^2 est une parabole, A son point à l'infini, u la droite à l'infini, Y le point à l'infini, de la tangente au sommet, O sur l'axe de la parabole : la cubique dérivée de C^2 par la transformation pseudo-newtonienne [Y, O, u] touche la parabole en son point à l'infini A, a un point double en O et la tangente au sommet A' de la parabole pour asymptote d'inflexion. Elle passe par les deux points où C^2 est coupée par la polaire s de O, et ses tangentes en ces points sont parallèles à l'axe de symétrie; la droite des points d'inflexion est parallèle à s et à une distance de cette droite égale à celle du point O. Cette cubique a été étudiée par M. Henkel sous le nom de *Tangentencurve* de la parabole (*); en particulier, si O est sur la directrice de la parabole C^2, nous avons la cubique appelée *mixte* par M. De Longchamps. En appliquant à la parabole C^2 la transformation [Y, A^∞, s], on obtient la cubique de M. Henkel et celle de M. De Longchamps comme Robervalliennes.

(*) *Inaugural Dissert.*, citée.

Digitized by Google

Cubique d'Agnesi. — C^2 est une ellipse dont le petit axe A'A est la moitié du grand axe; O et Y sont à l'infini dans les directions respectivement du petit et du grand axe, u est la tangente

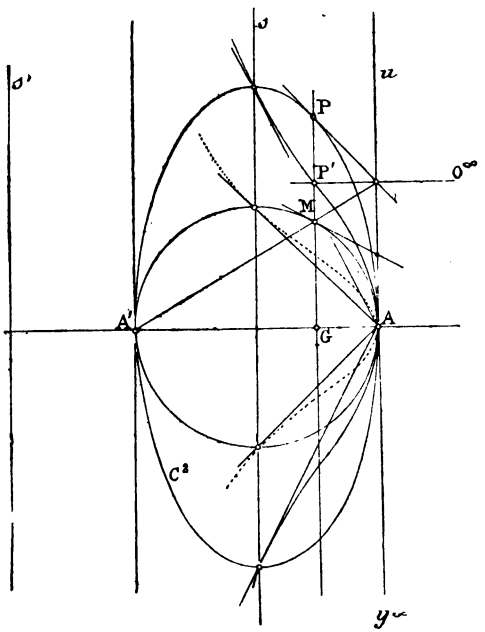


Fig. 8.

au sommet A, s la droite du grand axe, s' la droite symétrique de s par rapport à la tangente au sommet A' : la transformée de C^2 soit par [Y, O∞ , u], soit par [Y, A, s] est la *versiera* d'Agnesi (*), et la première de ces générations montre qu'elle

(*) Si G est le pied de l'ordonnée du point P de l'ellipse, et ω l'intersection de la tangente en P avec l'axe |AY|, la droite |A'ω| coupe le cercle décrit sur le diamètre $\overline{A'A}$ au centre M du segment $\overline{PG}$: cela posé, les triangles semblables A'MG et A'ωA donnent A'G : GM = A'A : Aω, ou bien A'G : GM = A'A : GP', et cette proportion montre que le lieu de P' est bien celui défini par Agnesi. (*Instituzioni analitiche*, t. I, p. 381. Milano, 1748.)

Digitized by Google

est une Robervallienne de l'ellipse C^2. La *versiera* passe par les sommets de C^2 sur le grand axe, touche C^2 au sommet A, a un point double isolé à l'infini en O; la tangente à C^2 au sommet A' est asymptote d'inflexion. Les deux autres points d'inflexion réels de la cubique tombent sur la médiatrice du segment qui joint le centre de l'ellipse au sommet A, et on les construit par suite aisément; les antitangentiels du sommet A sont les points extrêmes du grand axe de C^2. Nous pouvons construire aussi les tangentes, imaginaires conjuguées, au point double comme il suit : le sommet A de la cubique, considéré comme cercle-point, marque sur l'asymptote d'inflexion deux points imaginaires conjugués qui sont projetés du point double suivant les deux tangentes cherchées.

Du cercle C_1^2 décrit sur le diamètre $\overline{A'A}$, on déduit, par les deux transformations indiquées, une cubique ayant même sommet A, même asymptote d'inflexion (la tangente en A') et les ordonnées perpendiculaires à $|A'A|$ moitiés de celles de la *versiera*; c'est la courbe que l'on a quelquefois confondue avec l'*Agnesienne* et que M. Loria appelle *pseudo-versiera* (*).

8. Nous allons traiter des cas relativement assez simples où la courbe primitive C_n^n est d'un degré supérieur à 2. Supposons d'abord que C_n^n soit une cubique cuspidale en position générale : nous avons $m = n = 3$, la transformée est du sixième ordre et du genre zéro, a un point triple d'inflexion au premier pôle Y, un point triple ordinaire au deuxième pôle O et $\frac{1}{2}[(2 \times 3 - 3)3 - 1] = 4$ points doubles dont un est un rebroussement de la première espèce, dû au rebroussement de la courbe primitive; on en conclut $\delta = 9$, $\varkappa = 1$ et la classe de la transformée est 9.

Si la courbe primitive C_n^3 a un point simple au premier

(*) *Versiera, Visiera e Pseudo-versiera.* (*Bibliotheca mathematica* de M. G. Enestrœm, Stockholm, 1897, pp. 7-12.) Voir aussi les notes de MM. D'Arcais, Peano et Rébière dans l'*Interméd. des Mathém.*, année 1895, p. 83.

Digitized by Google

pôle Y, sa transformée (voir le n° 5, *a*) est une quintique unicursale ayant en Y un point triple d'inflexion avec une coïncidence (deux des tangentes stationnaires vont tomber sur la tangente de C_5^5 en Y), un point double au deuxième pôle, et deux autres points doubles que l'on détermine sans peine en observant que dans le cas actuel la courbe C' est une conique (*); comme le point triple est équivalent à deux points doubles ordinaires et un rebroussement de première espèce, nous avons $\delta = 3 + 2 = 5$, $\varkappa = 1$ et la transformée est de la classe 7.

Si la courbe primitive est une cubique C_4^3 de la quatrième classe ayant un point d'inflexion au premier pôle Y et son point double au deuxième pôle O, sa transformée est le produit d'un faisceau quadruple Y et d'un faisceau double O; cette dernière courbe est donc unicursale et du sixième degré, et a en O un point double avec les mêmes tangentes de C_4^3 (voir § 5 *b*); Y est un point quadruple spécial d'inflexion, trois des tangentes stationnaires en ce point coïncident avec la tangente stationnaire de C_4^3 et l'autre est la tangente à C_4^3 issue de Y; la sextique possède encore trois autres points doubles (**).

Considérons encore la transformée pseudo-newtonienne du *folium parabolique droit* en prenant le sommet A du folium pour deuxième pôle. La droite | AY | se détache une première fois de la transformée, car elle est tangente à la primitive (n° 3, *d*), et une deuxième fois, car Y est un point simple (n° 3, *a*); la droite à l'infini s'en détache deux fois, car elle est tangente stationnaire en Y (n° 3, *c*). La courbe résiduelle est donc une cubique parabolique ayant un point d'inflexion en Y et un point isolé en A (***).

Si la courbe donnée est une quartique tricuspidale, C_3^4 en

(*) Salmon, *Courbes planes*, p. 259 de l'édition française.

(**) On ne connaît pas, je crois, l'abaissement de la classe dû à la singularité extraordinaire rencontrée au point quadruple Y. Pour le cas du *folium de Descartes*, comparez Brocard, *loc. cit.*, p. 10.

(***) Si l'équation du folium parabolique, rapporté à l'axe de symétrie et à la tangente au sommet, est $x(x + a') = ay^2$, celle de sa transformée pseudo-newtonienne est $9x^2 = a(5x^2 + 4y^2)$.

Digitized by Google

position générale, sa transformée est unicursale et du degré 7, a un point triple d'inflexion au premier pôle et un point quadruple ordinaire au second pôle; comme la courbe C^{ν} dans le cas actuel est du degré $\frac{1}{2}[(2.4-3)3-3]=6$, et que des six points doubles auxquels elle donne lieu il y en a trois qui sont des rebroussements de première espèce, correspondant aux trois rebroussements de la courbe primitive, nous avons $\delta=6+3+3=12$, $\varkappa=3$, et la transformée est de la classe 9.

Milan, le 20 mai 1899.

Digitized by Google

LES

PERMUTATIONS CARRÉES

DE BASE 6

par Gaston TARRY

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. II, 1900.)

Les écussons. — Dans les 36 cases d'un échiquier de base 6, répartissons les 6 premiers chiffres, répétés chacun 6 fois, de manière que dans chaque rangée et dans chaque colonne on trouve les 6 chiffres.

L'abaque ainsi obtenu sera une *permutation carrée* de base 6.

Considérons les permutations d'un couple de rangées ou de colonnes.

La substitution qui a pour effet de remplacer l'une des permutations par l'autre est circulaire, ou composée de plusieurs substitutions circulaires.

Nous représenterons la relation existant entre ces deux permutations :

1° Par α, quand la substitution qui les identifie est composée de trois transpositions;

2° Par β, quand la substitution est composée d'une transposition et d'un cycle de 4 chiffres;

3° Par γ, quand la substitution est composée de deux cycles de 3 chiffres;

4° Par δ, quand la substitution est circulaire.

Il n'y a pas d'autres combinaisons.

Digitized by Google

Construisons une permutation carrée quelconque :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 3 6 5 2 1
5 6 2 1 3 4
6 4 5 2 1 3

Les relations entre la première rangée et chacune des cinq autres sont respectivement α, β, δ, δ, β.

La suite α, β, δ, δ, β figure la relation de la première rangée avec les autres.

A chaque rangée correspond de la sorte une suite.

Plaçons ces suites les unes au-dessous des autres. Pour la permutation considérée, nous aurons le tableau suivant :

α β δ δ β
α δ γ γ δ
β δ δ δ γ
δ γ δ γ δ
δ γ δ γ δ
β δ γ δ δ

Dans ce tableau des cycles, écrivons les lettres par ordre alphabétique dans chaque rangée, puis disposons aussi les rangées dans l'ordre alphabétique.

Le nouveau tableau sera le *schéma* des rangées.

En opérant de même pour les colonnes, leurs suites étant placées en rangées, nous obtiendrons le schéma des colonnes

J'appelle *écusson* ce couple de schémas.

Pour la permutation qui nous occupe, on a cet écusson :

α β β δ δ	β β γ δ δ
α γ γ δ δ	β β γ δ δ
β γ δ δ δ	β β γ δ δ
β γ δ δ δ	β β γ δ δ
γ γ δ δ δ	β δ δ δ δ
γ γ δ δ δ	β δ δ δ δ

Digitized by Google

Chaque permutation carrée se trouve ainsi caractérisée par un écusson.

Une question se pose immédiatement.

Combien existe-t-il de schémas et d'écussons dans les permutations carrées de base 6 ?

Il y a 16 schémas. Les voici :

I

α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ

II

α α β γ δ
α α β γ δ
α α β γ δ
α α β γ δ
α β β δ δ
α β β δ δ

III

α α α α α
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ

IV

α α α δ δ
α β β γ γ
α β β γ γ
α β β γ γ
β β β γ δ
β β β γ δ

V

α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ

VI

α α α γ γ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

VII

α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ

VIII

α β β β β
α δ δ δ δ
β β β γ δ
β β β γ δ
β β β γ δ
β β β γ δ

IX

α β β β β
α δ δ δ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ

X

α β β δ δ
α γ γ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

XI

β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β

XII

β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ

XIII

β β β δ δ
β β β δ δ
β β β δ δ
β β β δ δ
β δ δ δ δ
β δ δ δ δ

XIV

β β γ δ δ
β β γ δ δ
β β γ δ δ
β β γ δ δ
β δ δ δ δ
β δ δ δ δ

XV

β β δ δ δ
β β δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ

XVI

γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

Digitized by Google

Il y a 16 écussons, qu'il suffit de représenter par leurs couples de schémas :

1	2	3	4
I + I	II + II	III + XI	IV + V
5	6	7	8
V + V	VI + XII	VII + VII	VIII + VIII
9	10	11	12
IX + XIII	X + XIV	XI + XI	XII + XII
13	14	15	16
XIII + XIII	XIV + XIV	XV + XV	XVI + XVI

Quand les deux schémas d'un écusson sont différents, on peut les alterner, puisque cette transposition revient à déplacer le spectateur de manière que les rangées lui paraissent des colonnes et réciproquement.

Les permutations types. — Nous disons que deux permutations carrées sont *semblables*, lorsqu'elles peuvent se transformer l'une en l'autre par des permutations de rangées, de colonnes et de chiffres.

Réunissons dans une même famille toutes les permutations carrées semblables et choisissons-en une qui sera le *type* de cette famille.

Avec l'aide des écussons, j'ai trouvé rapidement que le nombre de familles était égal à 17, et j'ai choisi pour les représenter les 17 types suivants :

1 Écusson 1	2 Écusson 2	3 Écusson 3	4 Écusson 4
1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5	2 1 4 3 6 5	2 1 4 3 6 5	2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 2 4	3 5 1 6 2 4	3 5 1 6 2 4	3 5 1 6 2 4
4 6 2 5 1 3	4 6 2 5 1 3	4 6 5 1 3 2	4 6 5 1 3 2
5 3 6 1 4 2	5 4 6 1 3 2	5 4 6 2 1 3	5 3 6 2 4 1
6 4 5 2 3 1	6 3 5 2 4 1	6 3 2 5 4 1	6 4 2 5 1 3

Digitized by Google

5 Écusson 5

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 2 1 3
5 3 6 1 2 4
6 4 2 5 3 1

6 Écusson 6

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 5 6 1 2 3
5 6 1 2 3 4
6 3 2 5 4 1

7 Écusson 7

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 3 6 5 2 1
5 6 1 2 3 4
6 5 2 1 4 3

7bis Écusson 7

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 3 6 5 2 1
5 6 1 2 4 3
6 5 2 1 3 4

8 Écusson 8

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 1 2 3
5 3 6 2 1 4
6 4 2 5 3 1

9 Écusson 9

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 1 2 3
5 4 6 2 3 1
6 3 2 5 1 4

10 Écusson 10

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 6 1 5 2 3
5 3 6 2 4 1
6 5 2 1 3 4

11 Écusson 11

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 1 6 2 5
4 5 6 1 3 2
5 6 2 3 1 4
6 3 5 2 4 1

12 Écusson 12

1 2 3 4 5 6
2 3 1 5 6 4
3 1 2 6 4 5
4 5 6 1 3 2
5 6 4 3 2 1
6 4 5 2 1 3

13 Écusson 13

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 1 6 2 5
4 5 6 1 3 2
5 6 2 3 4 1
6 3 5 2 1 4

14 Écusson 14

1 2 3 4 3 6
2 1 4 5 6 3
3 4 2 6 1 5
4 5 6 3 2 1
5 6 1 2 3 4
6 3 5 1 4 2

15 Écusson 15

1 2 3 4 3 6
2 1 4 5 6 3
3 4 2 6 1 5
4 6 5 2 3 1
5 3 6 1 2 4
6 5 1 3 4 2

16 Écusson 16

1 2 3 4 5 6
2 3 1 5 6 4
3 1 2 6 4 5
4 6 5 2 1 3
5 4 6 3 2 1
6 5 4 1 3 2

Comme on le voit, chaque famille possède son écusson propre, à l'exception des familles 7 et 7*bis*, qui ont le même écusson.

La considération des écussons permet de résoudre facilement le problème suivant :

Étant donnée une permutation carrée quelconque, trouver sa famille et effectuer les changements nécessaires pour l'identifier au type de cette famille.

Digitized by Google

On forme son écusson qui désigne la famille. Les deux tableaux de ses cycles serviront de guides pour les changements des rangées et des colonnes, puisque les tableaux cycliques doivent être amenés à être identiques à ceux du type. Les changements indiqués étant opérés, il suffira le plus souvent de permuter les chiffres de manière à remplacer la première rangée de la nouvelle permutation carrée par celle du type. Dans le cas particulier où l'écusson porte le n° 7, on verra aisément auquel des types 7 ou 7bis la permutation carrée doit être identifiée.

Comme exemple, prenons la permutation déjà examinée :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 3 6 5 2 1
5 6 2 1 3 4
6 4 5 2 1 3

Son écusson X + XIV la place dans la famille 10.
Elle peut donc être identifiée au type 10 :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 6 1 5 2 3
5 3 6 2 4 1
6 5 2 1 3 4

Nous obtiendrons, en changeant l'ordre des rangées,

2 1 4 3 6 5
1 2 3 4 5 6
4 3 6 5 2 1
6 4 5 2 1 3
3 5 1 6 4 2
5 6 2 1 3 4

Digitized by Google

puis l'ordre des colonnes :

6 5 2 1 4 3
5 6 1 2 3 4
2 1 4 3 6 5
1 3 6 4 5 2
4 2 3 5 1 6
3 4 5 6 2 1

Enfin, multiplions toutes les permutations des rangées par la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, et nous tomberons sur le type 10.

Si l'écusson s'était présenté sous la forme alternée XIV + X, il aurait fallu commencer par transformer les rangées en colonnes et réciproquement.

Application au problème des 36 officiers. — Pour résoudre ce problème, il faudrait pouvoir superposer case à case deux permutations carrées de base 6, de telle manière que chaque chiffre de l'une d'elles soit superposé aux 6 chiffres de l'autre.

Dans les recherches, il sera toujours permis de changer l'ordre des rangées et des colonnes d'une superposition, puis de permuter isolément les chiffres dans chacune des permutations carrées. En effet, si la superposition résout le problème, toutes celles obtenues par les changements indiqués fourniront des solutions, et réciproquement, si la superposition ne résout pas le problème, il en sera de même des transformées.

Le problème ne peut donc être résolu que si l'on parvient à superposer à l'un des 17 types une seconde permutation carrée, de manière à satisfaire aux conditions exigées, et cela suffit.

Dans la seconde permutation carrée, nous ne pouvons plus changer l'ordre des rangées et des colonnes, mais on demeure libre de permuter les chiffres. En conséquence, on pourra toujours représenter sa première rangée par 1, 2, 3, 4, 5, 6.

En employant cette méthode, j'ai constaté que le problème ne comportait pas de solution.

Digitized by Google

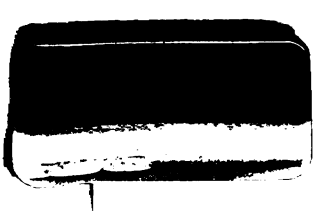
Il faut moins de 24 heures de calculs bien dirigés pour obtenir ce résultat. La démonstration de l'impossibilité de résoudre le problème des 36 officiers, nécessite moins de temps que la recherche du nombre des dispositions rectilignes des dés d'un jeu de dominos allant jusqu'au double-huit.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06853 7680



Digitized by Google